Yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden rakentaminen alkuopetuksen matematiikassa

"Kysy aina oppilaalta, mitä sinä ajattelit, kun laskit tämän."

professori Paavo Malinen
Matematiikan didaktiikan peruskurssi
syksy 1982 Jyväskylän yliopisto

Helsinki 2014

Tutkimuksia 358

Jari Lakka

Yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden rakentaminen alkuopetuksen matematiikassa

Yhden luokan oppilaiden erilaiset oppimispolut tehokkaisiin strategioihin

Esitetään Helsingin yliopiston käyttäytymistieteellisen tiedekunnan suostumuksella julkisesti tarkastettavaksi salissa 302 (Athena), Siltavuorenpenger 3A, perjantaina 22. elokuuta 2014 klo 12

Helsinki 2014

Esitarkastajat: *Professori*
Raimo Kaasila
Oulun yliopisto

Dosentti
Timo Tossavainen
Itä-Suomen yliopisto

Kustos: *Professori*
Markku Hannula
Helsingin yliopisto

Vastaväittäjä: *Associate Professor, Ph.D.*
Iiris Attorps
University of Gävle

ISBN 978-952-10-9539-9 (nid)
ISBN 978-952-10-9540–5 (pdf)
ISSN 1799-2508
Picaset Oy
2014

Helsingin yliopisto
Käyttäytymistieteellinen tiedekunta
Opettajankoulutuslaitos
Tutkimuksia 358

Jari Lakka

Yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden rakentaminen alkuopetuksen matematiikassa

Yhden luokan oppilaiden erilaiset oppimispolut tehokkaisiin strategioihin

Tiivistelmä

Tutkimuksessa selvitetään 1. ja 2. luokan oppilaiden käyttämiä laskustrategioita yhteen- ja vähennyslaskuissa. Pohjana laskustrategioiden kehittymiselle nähdään lukukäsitteen kehittyminen. Laskustrategioita tutkitaan niiden kehittymisestä puutteellisista strategioista aina tehtävän automatisoitumiseen asti. Samalla sivutaan päässälaskustrategioita (mentaalisia strategioita). Aihetta on maailmalla tutkittu paljon, mutta Suomessa verraten vähän.

Tutkimuskohteena on eteläsuomalaisen kaupunkikoulun 1–2. yhdysluokka, jossa oli 6 ensimmäisen luokan ja 11 toisen luokan oppilasta iältään 7–8 vuotta. Oppilaita haastateltiin syyskuussa, tammikuussa ja toukokuussa lukuvuonna 2003–2004. He saivat selittää, mitä he ajattelivat ratkaistessaan tavallisia yhteen- ja vähennyslaskuja, sellaisia kuin 7+7, 12-5, 15+15, 20-19 jne. Myös oppilaiden lukujonotaitoja testattiin. Matematiikan oppitunneilla oli konkreettisen materiaalin käyttö laskemisen apuna korostetusti esillä. Tutkimusongelmana oli millaisia laskustrategioita alkuopetuksen oppilailla on ja miten oppilaiden laskustrategiat kehittyvät vuoden mittaan. Myös oppimispolkuja tutkittiin. Tutkimusmetodina oli fenomenografia, jonka oletusten mukaisesti on löydettävissä muutama laskustrategioiden kategoria, johon kaikki laskustrategiat on luokiteltavissa.

Laskustrategioiden ilmiasu (outcome space) koostuu neljästä eri pääkategoriasta. Niistä ensimmäisen nimesin 'puutteellisiksi strategioiksi'. Oppilaan yksi-yhteen vastaavuus lukujen ja palikoiden välillä voi puuttua samoin kuin laskuissa tarvittava ns. kaksoislaskeminen (double counting). Toisen strategian nimesin 'lukusanoilla luettelemiseen' perustuvaksi strategiaksi. Siinä lasku lasketaan lukusanoja luettelemalla esim. mielessä tai vaikkapa sormia apuna käyttäen. Kolmannen kategorian nimesin nimellä 'omat strategiat'. Ne eroavat usein siitä, mitä oppitunneilla tai kirjoissa opetetaan. Neljäs laskustrategioiden kategoria on nimeltään 'ositteluun perustuvat strategiat'. Siinä laskeminen perustuu tunnettuihin tosiasioihin ja luvut ovat lapselle ymmärrettäviä ja ne on helppo pilkkoa osiin.

Tutkimuksen tuloksia on se, että laskeminen kehittyy lukusanojen luettelemisesta kohti todellista lukujen ymmärrystä. Samalla lukujärjestelmä tulee oppilaalle selkeäksi ja laskujen automatisoituminen lisääntyy. Luokassa oli löydettävissä Vygotskyn (1978) teoriaan lähikehitysvyöhykkeestä ja Muratan ja Fusonin (2006) teoriaan luokan oppimisvyöhykkeestä perustuen muutama erilainen oppimispolku, joita pitkin oppilaat kulkivat kohti tehokkaampia ositteluun perustuvia strategioita. Laskustrategioiden kehittyminen vaatii myös oppilaan ymmärryksen kehittymistä. Se perustuu ulkoisiin malleihin ja esityksiin, jotka oppilas sitten liittää osaksi omia tietoverkkojaan. Luokkaan pitää siis järjestää kymmenjärjestelmävälineitä ja -malleja. Opetuksen on edettävä konkreettisista malleista ja niihin liittyvistä konkreettisista strategioista mentaalisiin strategioihin ja edelleen kohti abstraktia ajattelua.

Avainsanat: laskustrategiat, oppimispolku, konkreettisuus, lähikehitysvyöhyke

University of Helsinki
Faculty of Behavioural Sciences
Department of Teacher Education
Research Report 358

Jari Lakka

Building Addition and Subtraction Strategies in the Teaching of Primary Level Mathematics

The Different Learning Paths to Effective Strategies by a Class of Students

Abstract

1st and 2nd grade students' thinking strategies in addition and subtraction tasks are researched in this multiple case study. The base for building counting strategies is the development of number concept. Counting strategies are studied from the point of being inadequate and undeveloped until the task becomes automatized. At the same time mental strategies are touched. The topic has been extensively researched worldwide, but relatively little in Finland.

A Southern Finnish suburb school class which consisted of 6 first grade students and 11 second grade students (age 7-8) was the subject of the study. Students were interviewed in September, in January and in May through school year 2003-2004. They were asked to explain, what they were thinking when they were solving usual addition and subtraction tasks, such as 7+7, 12-5, 15+15, 20-19 and so on. Students' numerical skills were also tested. In mathematics lessons we emphasized the use of manipulatives in teaching counting strategies. The research problem was to see which kind of counting strategies primary students have and how these strategies develop through the year. Learning paths of the class were also studied. The method was phenomenographic and, accordingly, there should be only a few counting strategy categories which contain all the strategies used in the tests.

The outcome space of counting strategies consists of four main categories. The first one I named 'Undeveloped strategies'. The student's one-to-one correspondence between number words and physical objects can be incorrect and so called double counting missing. The second category I named 'Counting with number words'. In this category a task is counted by counting with number words in one's mind or for example tracking number words with fingers. The third category I named 'Own strategies'. They often differ from those taught in mathematics lessons or in text books. The fourth category is named 'Strategies based on real partitioning'. In this category strategies are based on derived known facts, and numbers are understandable for children and they are easily divided into chunks.

The finding of this study is that counting develops from counting with number words towards a real understanding of numbers. At the same time, the ten-based value system becomes clear to the student and the automation of tasks increases. Based on Vygotsky's (1978) theory of a ZPD (Zone of Proximal Development) Murata and Fuson (2006) formed Model of Mathematical Proficiency. They also conceptualized a Class Learning Path that includes a small number of different learning paths followed by students. Indeed in our class there were found a few different learning paths. Students followed these paths when moving towards more effective strategies based on partitioning. To develop students' counting strategies is also to develop their understanding. It is based on external instructional models and representations, which students can connect with their internal networks of knowledge.

Ten-based physical materials and models ought to be placed in classrooms. Teaching should take place from concrete models and concrete strategies linked to them towards mental strategies and furthermore towards abstract thinking.

Keywords: Counting strategies, Learning Path, concrete materials, ZPD

Esipuhe

Minulla on ollut tilaisuus opettaa useamman kerran ensimmäistä luokkaa opettajanurani aikana. Niin tehdessäni alkoi matematiikan osalta mielessäni hahmottua kysymys: miksi toisille oppilaille oli niin vaikeaa edistyä yksinkertaisissakin yhteen- ja vähennyslaskuissa, kun taas toiset oppivat nämä laskut helposti. Siis kysymys, joka mitä suurimmassa määrin kuuluu fenomenografian piiriin. Tuolloin en kyllä tiennyt vielä mitään fenomenografiasta, johon tutustuin vasta tätä tutkimusta tehdessäni. Samoin huomasin, että oppilaat innostuivat matematiikasta eri tavoin. Ne, joille matematiikka oli helppoa, pitivät sitä luonnollisesti lempiaineenaan. Kun taas oppilaat, joilla oli matematiikassa vaikeuksia, väsyivät usein työlääseen yrittämiseen. Tästä kaikesta oli seuraus, että kun minulle tarjoutui tilaisuus jatko-opintoihin matematiikan didaktiikassa, valitsin juuri alkuopetuksen yhteen- ja vähennyslaskun oppimisen tutkimusaiheekseni.

Kiitokset opintojeni aloittamisesta kuuluvat professori emeritus Veijo Meisalolle, joka ystävällisesti toivotti minut tervetulleeksi jatko-opintoseminaarinsa. Sain häneltä arvokkaita neuvoja siitä, miten tutkimusta ylipäätään tehdään ja miten tutkimus etenee. Samoin kiitokset jatko-opintoseminaarin toisena ohjaajana toimineelle professori Jari Lavoselle. Myös häneltä sain apua tutkimuksen alkuvaiheessa, jolloin neuvoja todella tarvittiin.

Suurimmat kiitokset työni edistämisestä kuuluvat luonnollisesti ohjaajilleni dosentti Anu Laineelle ja professori emeritus Erkki Pehkoselle. Heistä Anu Laine oli mukana aivan alusta alkaen mm. suunnittelemassa tutkimukseni mittaria ja sitten muutaman vuoden tauon jälkeen ohjaamassa työni raportointia. Erkki Pehkonen taas seurasi jatkokoulutusseminaarin ohjaajana professori Veijo Meisaloa. Samalla hänestä tuli työni ohjaaja. Molemmat ohjaajani ovat antaneet hyödyllistä ja tarkkaa palautetta työstäni ja ovat myös sopivasti kannustaneet jatkamaan työtäni, kun se on välillä opettajantyöni ohessa tehtynä jäänyt vähemmälle huomiolle. Yhtä suuret kiitokset ansaitsee työni valvoja, matematiikan didaktiikan professori, Markku Hannula. Myös häneltä olen saanut arvokasta ja tarkkaa palautetta työstäni. Kaikki kolme, Anu, Erkki ja Markku, ovat auttaneet myös hiomaan tekstini ulkoasua. Kiitos teille!

Kiitokset myös opiskelijakollegoilleni nykyiselle tutkijatohtori Liisa Näverille ja FM Rauno Koskiselle. Heiltä olen saanut arvokasta palautetta ja kannustusta jatkaa työtäni. Raunolle erityiskiitokset mukavista kahvituokioista Helsingin kahviloissa, joissa juttelimme pitkään Vygotskystä ja Galperinista. Samoin kiitokset työni esitarkastajille dosentti Timo Tossavaiselle ja professori Raimo Kaasiselle. Molemmilta sain hyvää palautetta ja hyviä korjausehdotuksia, osa yksityiskohtiin liittyviä ja osa laajempiakin, kuten yhdysluokkakontekstin ja opettaja oman työnsä tutkijana -liikkeen mukaan ottaminen tähän tutkimukseen. Sen myös toteutin. Kiitokset myös amanuenssi Kari Pereniukselle työni saattamisesta painokuntoon. Kiitos myös ystävälleni Ulla Hietala-Beaversille siitä, että hän viimeisteli tutkimuksen englanninkielisen nimen ja abstraktin.

Kiitos Suomen Kulttuurirahastolle kahdesta apurahasta, joista ensimmäinen mahdollisti täysipäiväisenä tutkijana toimimisen vuoden ajan. Kiitokset apurahoista myös Emil Aaltosen säätiölle samoin kuin Helsingin yliopistolle, jolta olen saanut Kanslerin apurahan ja Opettajankoulutuslaitoksen johtajan apurahan väitöskirjatyön loppuunsaattamiseksi.

Kiitokset myös koulumme henkilökunnalle, erityisesti silloiselle koulunjohtaja Risto Maasillalle siitä, että minulla oli tilaisuus opettaa yhdysluokkaa 1–2, jossa sitten pystyin tutkimukseni toteuttamaan. Ja erityisesti kiitokset luokkani oppilaille ja vanhemmille siitä, että sain toteuttaa tutkimukseni. Te oppilaat olitte kaikki aivan suurenmoisesti mukana.

Lopuksi kiitokset ystävilleni ja sukulaisilleni kannustuksesta ja tuesta. Kiitokset myös rakkaalle vaimolleni Ritvalle. Sinä olet uskonut työhöni jo vuosikymmenen ajan.

Haminassa kesäkuussa 2014

Jari Lakka

Sisällys

1 Johdanto

Tämä on tutkimus ensimmäisen- ja toisen luokan oppilaiden tavoista laskea yhteen- ja vähennyslaskuja, siitä, mitä erilaisia strategioita he käyttävät laskiessaan laskuja, onko joku tapa tehokkaampi kuin toinen jne. Pyrkimyksenä on hahmottaa yhteen- ja vähennyslaskujen laskemisen prosesseja ja niiden muutosta. Samalla kun pääpaino on laskemisen strategioissa, tutkitaan myös lukukäsitettä, joka on perusta yhteen- ja vähennyslaskun strategioiden kehittymiselle. Tätä aihetta on maailmalla tutkittu paljon. (esim. Piaget 1952; Carpenter & Moser 1982; Siegler 1987; Hiebert & Wearne 1992; Fuson 1992.) Aihe on kuitenkin mielestäni erittäin tärkeä, ja toivon tutkimukseni lisäävän tietoa siitä, miten yhteen- ja vähennyslaskun oppiminen alkuopetuksessa oikein tapahtuu. Tulen esittämään vallitsevaan teoriaan täsmennyksiä ja omia löytöjäni. Tutkimukseni voi myös tuoda aiheeseen uuden näkökulman siksi, että tutkimuskohteeni on yhdysluokka.

Tutkimuksen teoriataustassa tutustutaan mm. Pjotr Galperinin opetus-oppimisteoriaan, jossa oppiminen alkaa orientaatiovaiheesta, ja jossa ulkoisilla oppilaan ympärillä olevilla konkreettisilla esinemalleilla on aivan ratkaiseva merkitys. Galperin (1979, 34–35) nimittää kuviksi kaikkia psyykkisiä heijastuksia, joissa subjektille avautuvat objektiivisen maailman esineet ja suhteet. Kuvat avaavat ensinnäkin subjektille itse objektit ja toiseksi ne antavat hänelle mahdollisuuden orientoitua niiden ominaisuuksiin ja suhteisiin. Esimerkkinä Galperin kertoo työtoveriensa tutkimuksista ja tuloksista, jotka osoittavat, että *uusi tehtävä on helpoin suorittaa "esineillä", vaikeampi ääneen pohtimalla ja kaikkein vaikein itsekseen, "päässä"* (Galperin 1979, 31). Nämä kolme vaihetta on hänen mukaansa erityisen helppo erottaa esikoulu- ja alkeiskouluiässä. Myöhemmin esimerkiksi ääneen pohdinta voi jäädä pois ja lopputuloksena itse orientaatiotoiminta lyhenee ja prosessi automatisoituu.

Edelleen teoriataustassa tutustutaan Hiebertin ja Carpenterin teoriaan matematiikan opetuksesta, "Learning with understanding", vuodelta 1992. Heidän mukaansa matematiikan koulutuksen yhteisössä nimenomaan se, että opiskelijan pitäisi ymmärtää matematiikkaa, on mitä laajimmin hyväksytty periaate. Mutta tämän tavoitteen saavuttamista he vertaavat "Graalin maljan" etsimiseen. Tavoitteesta ollaan yhtä mieltä, mutta opiskeluympäristön rakentaminen sellaiseksi, että se suosii ymmärtämistä, on vaikeaa. Mallissaan he painottavat sekä opiskelijan sisäisiä tietoverkkoja että luokkahuoneen ulkoisia aktiviteetteja, jotka lisäävät ja edistävät näiden sisäisten esitysten rakentumista. (Hiebert & Carpenter 1992.)

Yhden mallin ulkoisen materiaalin tärkeydestä antoi jo aikanaan Maria Montessori, jonka mukaan tämä materiaali tarjoaa lapselle välineen, jonka käyttöä lapsen luontainen kiinnostus ja sisäiset energiat ohjaavat (Montessori 1965). Hänen mukaansa lapsen on saatava valita vapaasti esineet, jotka he sitten valitsevatkin sen mukaan, mitä heidän "sisäinen kasvunsa" vaatii. Tämä materiaali on tarpeellinen vain alussa, myöhemmin sitä tarvitaan vain siihen, että saa tarvittaessa tukea. Sen pariin voi myös aina palata. Maria Montessori myös kiinnittää hyvin paljon huomiota materiaalin laatuun, esimerkiksi väreihin. (Montessori 1965.)

Suomalaisia alkuopetuksen matematiikan tutkimuksia:

Viimeisen 30 vuoden aikana voidaan Suomessa mainita seuraavat tutkimukset alkuopetuksen matematiikan oppimiseen liittyen: Keranto (1981), Kallonen-Rönkkö (1984), Vornanen (1984), Lindgren (1990), Häggblom (2000), Aunio (2006) ja Koponen (2008). Näistä kolme ensimmäistä olivat voimakkaasti sidoksissa sen aikaiseen kognitiivisen psykologian traditioon, erityisesti piagetilaiseen kehityspsykologiaan. Lindgrenin (1990) väitöskirjassa taas paneuduttiin toimintamateriaalin käyttöön ja hyödyllisyyteen. Toimintamateriaalin käyttö on mukana tässäkin tutkimuksessa, mutta asetelma ei ole niin koeasetelmallinen, vaan tutkin enemmän kouluopetusta ja sen vaikutusta yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden kehittymiseen. Häggblomin (2000) väitöskirjassa selvitettiin lasten lukukäsitteen ja matemaattisten taitojen kehitystä ikävuosina 6–15.

Aunio (2006) tutki lukukäsitteen hallintaa suomalaisilla sekä aasialaisilla lapsilla (Peking, Hong Kong, Singapore). Hän myös kehitti suomalaisten lasten lukukäsitteen mittarin sekä tutki matemaattisen ajattelun interventiota suomalaisilla päiväkotilapsilla. Omassa tutkimuksessani tutkin myös lasten lukukäsitteen kehittymistä, mutta näkökulma on enemmän laadullinen. Olen kiinnostunut siitä, miten lukukäsitteen kehittyminen näkyy yhteen- ja vähennyslaskustrategioissa.

Koponen (2008) puolestaan tutki kielellisten taitojen yhteyttä matemaattisten perustaitojen kehittymiseen. Hänellä oli myös käytössään kvalitatiivinen tutkimusote kahdessa osatutkimuksessa neljästä. Kvalitatiivinen tutkimusote on käytössä myös tässä tutkimuksessa.

Yhdysluokkaopetus:

Yhdysluokkaopetus tarkoittaa opetusta, jossa opettaja opettaa samanaikaisesti kahta tai useampaa eri-ikäisryhmää (Kalaoja 2010, 102). Yleisintä tällainen opetus on pienissä kyläkouluissa, mutta se näyttää lisääntyvän pedagogisten ansioidensa takia myös kaupunkikouluissa. Omassa koulussamme se oli luonteva ratkaisu, koska ensimmäisen luokan oppilaita oli niin vähän, vain kuusi oppilasta. Yhdysluokkaopetus oli koulussamme kuitenkin aika uusi ratkaisu ja siitä ei ollut paljon kokemusta. Itsellänikään ei ollut siitä kokemusta ja vei tietysti aikaa oppia yhdysluokkarutiineja. Asiaa helpotti tietenkin luokan pieni koko, vain 6 ensimmäisen luokan oppilasta ja 11 toisen luokan oppilasta.

Yhdysluokkaopetuksella on Korpisen (2010, 20) mukaan Suomen koulujärjestelmässä historialliset ja kansainväliset juuret. Saksalainen Peter Jensen oli koulunuudistaja, joka teki kokeitaan Jenan kaupungissa. Hänen mielestään luokan sosiaalinen rakenne oli tehokas kasvatustekijä ja siksi kannatti muodostaa eri vuosiluokista koostuvia yhdistettyjä luokkia. Jenan koululuokissa tärkeimmät työtavat olivat ryhmätyö, opetuskeskustelu ja ”kurssi”, jolla tarkoitettiin opettajajohtoista työskentelyä. Jenan kokeilukouluun tutustui professori Matti Koskenniemi, joka välitti Petersenin kasvatusopillisia ajatuksia Suomeen. (Korpinen 2010, 20.)

Vygotskyn 1920- ja 1930-lukujen Neuvostoliitossa kehittämän näkemyksen mukaan oppiminen ei ole yksilöllistä ja sisäistä, vaan pikemminkin kognitiiviset kyvyt ja kapasiteetti rakentuvat ja muotoutuvat sosiaalisena ilmiönä (Meadows

1993, 236). Siis lapsi oppii parhaiten yhteistyössä itseään kokeneemman, älyllistä tukea tarjoavan henkilön kanssa. Tällaisen yhteisön juuri yhdysluokka tarjoaa. Peltosen (2010, 109) mukaan yhdysluokassa kaveriyhteisön merkitys korostuu, koska oppilaat ovat toisiinsa nähden monella eri tasolla. Lapset oppivat auttamaan toisiaan ja heitä itseään autetaan. Yhdysluokassa oppilaat myös tottuvat itsenäiseen työskentelyyn ja oma-aloitteellisuuteen, koska opettaja ohjaa välillä toista opetusryhmää.

Peltosen (2010) mukaan opetusryhmän heterogeenisuudesta on merkittävää hyötyä yhdysluokkaopetuksessa. Alemman luokkatason oppilaat voivat hyötyä ylemmän luokkatason opetuksesta. He kuulevat ylemmälle luokkatasolle opetettavat asiat ja voivat samalla oppia niistä. Alemman luokkatason oppilas voi saada häntä kiinnostavia ja hänelle sopivia virikkeitä ylemmän luokkatason oppimateriaaleista. Hän voi tahattomasti oppia omalle kehitystasolleen sopivia asioita ylemmälle luokkatasolle tarkoitetusta opetuksesta. Nuorempien opetus puolestaan kertaa ja vahvistaa ylempiluokkalaisille heidän aiemmin oppimiansa asioita. (Peltonen 2010.)

Matematiikan opetuksessa edellä kuvattu yhdysluokkaopetus on erityisen hyödyllistä. Vaikka ensituntuma voisi olla se, että matematiikka, jos mikä, on eri oppiaineista erityisen sidottu juuri vuosiluokkansa oppisisältöihin, on yhdysluokkaopetuksella paljonkin etuja annettavana. Esimerkiksi ensimmäisellä luokalla on aina niitä oppilaita, joille laskeminen on entuudestaan helppoa. He mielellään seuraavat vaativampia toisen luokan oppilaiden tehtäviä. He ikään kuin oppivat ”salaa” jo toisen luokan asioita. Toisaalta toisen luokan oppilaissa on aina niitä, joille perusasioiden ja vaikkapa kymmenylityksen kertaaminen on tarpeellista. Yhdysluokkaopetus palvelee tällöin opetuksen eriyttämistä.

Opettaja työnsä tutkijana:

Suomessakin on 1990-luvulta lähtien levinnyt ajatus siitä, että opettaja voi olla oman työnsä tutkija (Korpinen 1996). Myös opettajankoulutuksessa tämä on otettu huomioon. Ojasen (1996) mukaan opettajankoulutuksen kehittäminen reflektiiviseksi muodostui suoranaiseksi liikkeeksi 1980–1990-luvuilla. Reflektiolla nähtiin olevan keskeinen merkitys missä tahansa oppimisessa. Reflektio on Ojasen (1996, 53) mukaan sanan latinalaisen alkuperän mukaisesti kuin peili tai ikkuna, jonka avulla voi katsella omaa praktiikkaa. Opettajan pitää siis peilata omaa työtään, sen suuntaa ja tavoitteita, kenties kyseenalaistaen omat käytäntönsä.

Opettaja työnsä tutkijana -tutkimukset ovat usein käytännönläheisiä *toimintatutkimuksia*. Tutkimus voi olla prosessipainotteista, jolloin tutkitaan erityisesti opetustoimenpiteiden vaikutusta oppilaisiin. Tällöin tutkimuksen tarkoitus voi olla löytää tietyn tavoitteen toteuttamiseksi tehokkaita toimintatapoja. Tutkimuksen tavoite voi myös olla laaja-alaisempi. Pyritään siihen, että toiminnan kehittäminen nähdään koko yhteisön asiana. (Leino 1996, 82–83; Kemmis 2006.)

Tämä tutkimus kuuluu opettaja työnsä tutkijana -liikkeen piiriin. Siinä on myös toimintatutkimuksen piirteitä. Tutkin oppilaideni yhteen- ja vähennyslaskustrategioita samoin kuin laajemminkin heidän lukukäsitteen hallintaansa. Kerron tässä tutkimusraportissa matematiikan opiskelustamme, jossa erityisesti halusin korostaa konkreettisen materiaalin käyttöä opetuksen tukena. Varsinaisen tutkimusaineistoni keräsin kuitenkin oppilaiden systemaattisilla haastatteluilla, jotka toteutettiin kolme kertaa lukuvuoden aikana. Niiden analysoinnissa päädyin käyttämään fenomenografista tutkimusotetta.

Fenomenografia:

Tutkimus on siis fenomenografinen tutkimus oppilaiden erilaisista laskustrategioista. Fenomenografia on tutkimussuuntaus, joka syntyi joidenkin tutkijoiden piirissä Ruotsissa Göteborgin yliopistossa 1970- luvulla (ks. Marton 1994; Booth 1992; Neuman 1987). Lähtökohtana tutkimuksissaan heillä oli eräs yksinkertaisimmista havainnoista, joka voidaan oppimisesta tehdä, nimittäin havainto, että jotkut ovat parempia oppimaan kuin toiset. Se taas johti kysymään, mitä tarkoittaa se, että jotkut ovat parempia oppimaan kuin toiset.

Opiskelijoiden oppimista tutkittiin heidän omassa opiskeluympäristössään. Opiskelijoita haastateltiin ja heidän vastauksensa litteroitiin. Opiskelijoiden erilaiset käsitykset kuvattiin mahdollisimman tarkasti, erityisesti erot muiden käsityksiin, niin että voitiin muodostaa kuvauksista kategorioita. Nämä kategoriat puolestaan muodostivat hierarkkisen järjestelmän, joka kuvasi opiskelijoiden käsityksiä (ns. outcome space). (Marton 1994.)

Tässä tutkimuksessa tutkimuksen kohteena ovat oppilaiden laskustrategiat. Näitä strategioita oppilaat selittävät haastatteluissa. Näin saadusta aineistosta etsitään strategioita, jotka ovat keskenään samankaltaisia tai sitten erilaisia. Fenomenografian periaatteiden mukaisesti on todennäköistä, että strategiat voidaan ryhmittää muutaman kategorian alle. Nämä laskustrategioiden kategoriat ovat tämän tutkimuksen päätuloksia. Saatuja tuloksia verrataan teoriataustassa esiteltyihin aiempiin tutkimustuloksiin.

Tutkimuksen raportointi:

Tutkimuksessa on siis tarkoitus selvittää 1. ja 2. luokan oppilaiden tapoja laskea yhteen- ja vähennyslaskuja. Tutkimuskohteena oli oma yhdysluokkani, jossa oli 6 ensimmäisen luokan ja 11 toisen luokan oppilasta. Lukuvuoden mittaan matematiikan tunneilla oli myös korostetusti konkreettisia malleja ja materiaalia opiskelun apuna.

Aluksi luvussa 2 luodaan katsaus matematiikan opetussuunnitelmaan ja perehdytään konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen. Samoin siinä tutustutaan tiedon automatisoitumiseen sekä matemaattiseen ajatteluun ja ymmärtämiseen. Lopuksi luodaan katsaus konkreettisen materiaalin käyttöön matematiikan opetuksessa.

Luvussa 3 luodaan katsaus oppimispsykologiseen taustaan. Perehdytään Jean Piaget’n teorioihin sekä kognitiivisesta kehityksestä että lukukäsitteen rakentumisesta. Samoin tutustutaan Vygotskyn teoriaan oppimisen yhteisöllisyydestä ja hänen oppilaansa ja työtoverinsa Galperinin opetus-oppimisteoriaan. Samassa luvussa tutustutaan myös lähikehitysvyöhykkeeseen sekä luokan oppimisvyöhykkeeseen. Se taas johtaa tutustumaan luokan oppimispolkuihin.

Luvussa 4 perehdytään tarkemmin lukukäsitteeseen ja laskemisen strategioihin. Ensin tutustutaan lukukäsitteen rakentumiseen Piaget'n mukaisesti. Sen jälkeen tutustutaan angloamerikkalaiseen Karen Fusonin kokoamaan teoriaan sekä lapsen lukukäsitteen kehittymisestä että teoriaan yhteen- ja vähennyslaskun kehittymisen vaiheista. Pohditaan myös moninumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskujen rakentumista ja niiden kehittymiseen liittyviä vaikeuksia. Samoin tutustutaan näihin moninumeroisiin yhteen- ja vähennyslaskuihin liittyviin mentaalisiin strategioihin. Myös asiaan liittyviä tutkimuksia esitellään.

Viidennessä luvussa esitellään tutkimuksen metodologiset ja menetelmälliset ratkaisut. Samalla perehdytään tarkemmin fenomenografiaan ja sen erityispiirteisiin. Luvuissa 6 ja 7 esitetään tutkimuksen tuloksia. Kahdeksannessa luvussa pohditaan tutkimuksen luotettavuutta ja lopuksi luvussa 9 pohditaan tulosten merkitystä etenkin matematiikan opetukseen ja luokan käytäntöihin.

2 Matematiikan opetuksen taustatekijöitä

Matematiikan opetuksen taustalla vaikuttaa aina mm. voimassa oleva opetussuunnitelma ja vallalla oleva oppimiskäsitys. Nämä molemmat ovat historiallisen kehityksen tulosta. Ne ovat myös yhä enemmän yleismaailmallisia, koska kasvatustiede muiden tieteiden tapaan on globaali ilmiö. Tässä luvussa käsitellään opetussuunnitelmaan liittyviä kysymyksiä samoin kuin nykyistä oppimiskäsitystä. Luodaan katsaus myös matemaattiseen ajatteluun ja ymmärtämiseen. Lopuksi esitellään tutkimuksia, jotka liittyvät konkreettisen materiaalin käyttöön matematiikan opetuksessa.

2.1 Matematiikan opetussuunnitelma

Matematiikanopetus on niin Suomessa kuin muuallakin historian kuluessa muuttunut paljon, mutta erityisen nopea muutos on ollut kolmena viimeisenä vuosikymmenenä (Pehkonen & Seppälä 2007). 1970-luvulla oli vallalla ”uusi matematiikka” -liikehdintä. Se sai alkunsa Yhdysvalloissa jo 1960-luvulla vastareaktiona sille, että Neuvostoliitto ennätti ensimmäisenä laukaisemaan tekokuun vuonna 1957. Yhdysvalloissa käynnistyi uudistusliike matematiikan ja luonnontieteiden opetuksessa ja matematiikan osalta se sai nimen ”New Math”, koska siinä nostettiin struktuurimatematiikan opettaminen keskeiselle sijalle. (Pehkonen & Seppälä 2007, 43.)

Suomeen uusi matematiikka joukko-oppeineen ennätti 1970-luvulla ja täällä sen valtaantulo liittyi koulu-uudistukseen, jossa vuosina 1970–77 siirryttiin peruskouluun. Nämä uudistukset liittyvät tiiviisti toisiinsa (Pehkonen & Seppälä (2007).

Samanaikaisesti peruskoulu-uudistukseen liittyivät yläasteella tasokurssit matematiikassa. Pehkonen ja Seppälä viittaavat artikkelissaan siihen, että tällä uudistuksella saatiin oppikoulunopettajat hyväksymään peruskoulu-uudistus. Kuitenkin tasokurssijärjestelmästä luovuttiin vuonna 1985, jolloin Kouluhallitus vahvisti kaikkia aineita koskevan Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet.

Kuten edellä jo ”uuden matematiikan” osalta todettiin, Suomen opetussuunnitelma seurailee USA:n opetussuunnitelman vaiheita, mutta vuosien viiveellä. Kupari (1999) on esitellyt peruskoulun matematiikan opetussuunnitelman vaiheita ja nimennyt niitä seuraavasti: ”uusi matematiikka” (noin 1970–1976), ”takaisin perusteisiin” (noin 1974–1985), ”ongelmanratkaisu” (noin 1983-) ja ”kansalliset päättötavoitteet” (noin 1994-). (Kupari 1999, 49–53.)

Vuoden 1994 opetussuunnitelman perusteet julkaistessaan Opetushallituksen tavoitteena oli saada kunnat ja erityisesti koulut laatimaan yksityiskohtaiset omat opetussuunnitelmansa. Tässä opetussuunnitelmassa korostettiin mm. sitä, että opetussuunnitelman piti reagoida jatkuvasti arviointituloksiin ja ympäristössä tapahtuvaan muutokseen. Korostettiin myös oppilaskeskeisyyttä ja valinnaisuutta. Samalla lisättiin koulujen päätäntävaltaa. (Näveri 2009, 27–28.) Tämä tavoite osoittautui myöhemmin liian idealistiseksi (Pehkonen & Seppälä 2007, 46).

Koska uudet opetussuunnitelman perusteet oli toimitettu kouluille jo vuonna 2002 ja koska uuden opetussuunnitelman perusteet hyväksyttiin tammikuussa

2004, jolloin tutkimukseni oli parhaillaan käynnissä, olen päätynyt tässä esittelemään perusteellisemmin juuri tätä opetussuunnitelmaa. Koulut tosin ottivat uuden opetussuunnitelman käyttöön vasta 1.8.2004 alkaen. Sen yleisessä osassa puhutaan myös oppimiskäsityksestä ja oppimisympäristöstä. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa vuodelta 2004 todetaan oppimiskäsityksestä mm. seuraavaa:

> *”Opetussuunnitelman perusteet on laadittu perustuen oppimiskäsitykseen, jossa oppiminen ymmärretään yksilölliseksi ja yhteisölliseksi tietojen ja taitojen rakennusprosessiksi, jonka kautta syntyy kulttuurinen osallisuus. Oppiminen tapahtuu tavoitteellisena opiskeluna erilaisissa tilanteissa itsenäisesti, opettajan ohjauksessa sekä vuorovaikutuksessa opettajan ja vertaisryhmän kanssa”.* (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, 18.)

Huomioitavaa on, että oppiminen ymmärretään myös yhteisölliseksi toiminnaksi, ei pelkästään oppilaan omaksi toiminnaksi. Tämä oppimiskäsitys pohjautuu selkeästi sosiokonstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, joka oli tuolloin yleisesti vallalla. Edelleen opetussuunnitelman perusteissa mainitaan oppimisympäristöstä mm. seuraavaa:

> *”Oppimisympäristöllä tarkoitetaan oppimiseen liittyvää fyysisen ympäristön, psyykkisten tekijöiden ja sosiaalisten suhteiden kokonaisuutta, jossa opiskelu ja oppiminen tapahtuvat. Fyysiseen oppimisympäristöön kuuluvat erityisesti koulun rakennukset ja tilat sekä opetusvälineet ja oppimateriaalit. …Opiskelutilat ja -välineet tulee suunnitella ja järjestää siten, että ne mahdollistavat monipuolisten opiskelumenetelmien ja työtapojen käytön”.* (Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004, 18.)

On huomioitavaa, että opetussuunnitelman perusteissa painotetaan oppimisympäristön osalta myös tarpeellisia opetusvälineitä. Matematiikan osalta tämän on tarkoitettava havainnollistamisvälineitä, jotka ovat ainakin alkuopetuksen matematiikassa tarpeellisia ja aivan välttämättömiä.

Vuosiluokkien 1–2 osalta matematiikan opetussuunnitelman perusteissa todetaan myös, että ”konkreettisuus toimii tärkeänä apuvälineenä yhdistettäessä oppilaan kokemuksia ja ajattelujärjestelmiä matematiikan abstraktiin järjestelmään” (emt. 2004,151). Opetussuunnitelman tavoitteena mainitaan mm. se, että oppilas ”oppii perustelemaan ratkaisujaan ja päätelmiään konkreettisin mallein ja välinein, kuvin, kirjallisesti tai suullisesti ja löytää ilmiöistä yhtäläisyyksiä ja eroja, säännönmukaisuuksia sekä syy-seuraussuhteita” (emt. 2004, 158). Konkreettiset apuvälineet mainitaan myös keskeisissä sisällöissä, joissa mm. mainitaan palikoiden ja kymmenjärjestelmävälineiden käyttö eri laskutapojen yhteydessä, vielä erikseen mainiten jakolaskussa.

Kuvauksessa oppilaan hyvästä osaamisesta 2. luokan päättyessä mainitaan ajattelun ja työskentelyn taitojen osalta mm. se, että ”oppilas pystyy tekemään perusteltuja päätelmiä ja selittämään toimintaansa ja osaa esittää ratkaisujaan konkreettisin mallein ja välinein, kuvin, suullisesti ja kirjallisesti” (emt. 2004, 159). Lukujen ja laskutoimitusten sekä algebran osalta kuvauksessa oppilaan hyvästä osaamisesta 2. luokan päättyessä mainitaan mm. se, että ”oppilas hallitsee lukujen hajottamisen ja yhdistämisen, vertailun, summien ja lukujonojen muodostamisen; hän tuntee parilliset ja parittomat luvut”. Samoin mainitaan hyvästä osaamisesta se, että ”oppilas tuntee ja ymmärtää kymmenjärjestelmän paikkajärjestelmänä sekä osaa käyttää sitä”. (Emt. 2004, 160.)

Opetussuunnitelmassa mainitaan siis useassa kohdassa konkreettiset välineet ja mallit, joilla oppilas voi esim. esittää tekemiään ratkaisuja. Edellä kuvailtu hyvän osaamisen taso 2. luokan lopussa olisi erinomainen lähtökohta matematiikan oppimiselle ylemmillä luokilla. Kuitenkin tutkimukset osoittavat, että usein oppilailla on puutteellisia strategioita peruslaskutoimituksissaan, ja että tämä vaikeuttaa heidän opiskeluaan ylemmillä luokilla. (Esim. Cumming & Elkins 1999; Fuson 1992; 1998.) Toisaalta meillä on tutkimuksia. jotka osoittavat, että jo alakoulussa on mahdollista kehittää oppilaiden algebrallista ajattelua (Fritzlar & Karpinski-Siebold 2011).

2.2 Muuttuva oppimiskäsitys

Kuten edellisessä kappaleessa todettiin, matematiikan opetussuunnitelma on muuttunut paljon viimeisen kolmen vuosikymmenen aikana. Samoin on muuttunut aina kulloinkin vallalla oleva oppimiskäsitys. Kun vielä 1960- ja 1970-luvulla oli vallalla behavioristinen oppimiskäsitys, alettiin 1980-luvulla yhä enemmän puhua ongelmakeskeisestä opetuksesta. Aluksi puhuttiin kognitiivisesta oppimiskäsityksestä, mutta myöhemmin vakiintui nimitys konstruktivistinen oppimiskäsitys.

Behavioristinen oppimiskäsitys

Behaviorismin edeltäjänä voidaan pitää amerikkalaisen E. L. Thorndiken kehittämää yleistä oppimisen psykologiaa. Thorndike pohjasi teoriansa assosiaatioteoriaan, mutta oli lisäksi kiinnostunut käyttäytymismuotojen oppimisesta sekä motivaatiosta (Rauste von Wright ym. 2003, 146). Teoksessaan ”The psychology of arithmetic” Thorndike mm. esittelee lukujen eri merkityksiä sekä esittelee lukuisia esimerkkejä kouluun sopivista harjoitteista. (Thordike 1922.)

Ensimmäisen maailmansodan jälkeen Thorndiken ajatuksia systematisoitiin ja radikalisoitiin behaviorismin piirissä. Oppiminen nähtiin yksinkertaisesti sarjana, jossa opetettava aines esitetään pieninä yksikköinä, joihin oppilas vastaa. Jos vastaus on oikea, sitä vahvistetaan positiivisella palautteella. Mallia otettiin luonnontieteistä ja vallalla oli vahva positivistinen usko. Lähes kaikkea voi opettaa ja kaikki voivat oppia, kunhan vain löydetään oikeat menetelmät. (Rauste von Wright ym. 2003, 148–149.)

Behavioristinen opetus tähtää konkreettisiin ja mitattaviin toimintoihin. Siinä perusperiaatteena on vertikaalisen transferin eli siirtovaikutuksen periaate. Kokonaisuudet rakennetaan osista. Tieto on pysyvää ja tiedon ’tiiliskivet’ voidaan koota rakennukseksi. Taustalla on myös oletus oppilaan kykyjen muuttumattomuudesta. Opetus pyritään räätälöimään kunkin oppilaan ’kykyrakennetta’ vastaavaksi. (Rauste von Wright ym. 2003, 150–151.)

Konstruktivistinen oppimiskäsitys

Behaviorismi oli vallalla kouluopetuksessa aina 1980-luvulle asti. Mutta viimeisen kolmen vuosikymmenen aikana konstruktivismilla on ollut keskeinen asema opetusta koskevassa keskustelussa. Tällöin ongelmaksi on muodostunut käsitteen epämääräisyys ja monimerkityksisyys. (Puolimatka 2002b, 21.) Konstruktivismissa rakentamisen tai konstruoinnin metaforalle tulee keskeinen merkitys, ja se voidaan eri yhteyksissä ymmärtää hyvin eri tavoin.

Tiedon rakentajaksi ymmärretään tavallisesti yksilöpersoona. Puolimatkan (2002b) mukaan tällaista lähestymistapaa edustavat mm. sveitsiläinen kehityspsykologi Jean Piaget sekä yhdysvaltalainen kasvatuspsykologi Ernst von Glaserfeld. Heidän mukaansa jokainen oppija rakentaa itse omat tietorakenteensa osana oppimisprosessiaan. (von Glaserfeld 1978; 1995.) Mutta rakentajaksi voidaan ymmärtää myös ryhmä, esim. oppilaat ja opettaja yhdessä. Tällaista yhteisöllistä lähestymistapaa edustaa mm. venäläinen psykologi Lev. S. Vygotsky.

Tässä tutkimuksessa tutustutaan myöhemmin tarkemmin Piaget'n teorioihin kuin myös Vygotskyn ja hänen seuraajansa Pjotr Galperinin teorioihin. Onhan konstruktivismiin kuuluva metafora *rakentaminen* mukana jo tämän tutkimuksen otsikossa ”Yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden rakentaminen alkuopetuksen matematiikassa”. Mielelläni näen tässä rakentamisessa osallisina niin oppilaan kuin opettajankin, miksi eivät myös vanhemmat ja muu yhteiskunta.

Konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen kuuluu siis se, että oppiminen ei ole tiedon passiivista vastaanottamista vaan oppijan aktiivista toimintaa, jossa hän tulkitsee havaintojaan ja uutta tietoa aikaisemman tietonsa ja kokemuksensa pohjalta. Näin hän rakentaa kuvaansa maailmasta ja sen ilmiöistä. (Tynjälä 1999, 37–38.)

Mutta oppija ei rakenna omaa oppimistaan vain yksin, omassa päässään, vaan useimmiten vuorovaikutuksessa muiden kanssa, esim. opettajan ja luokkatovereidensa seurassa. Tämän huomioonottavaa konstruktivismin suuntausta nimitetään sosiaaliseksi konstruktivismiksi ja sitä edustaa mm. Paul Ernest. Hänen mukaansa sekä sosiaaliset prosessit että yksilön oma järkeily ovat molemmat keskeisiä osia matematiikan opetuksessa. (Ernest 1994, 63.) Nyt painottaessaan Vygotskyn näkemyksiä oppimisen sosiaalisesta luonteesta Ernest sisällyttää sosiaalisen konstruktivismin tutkimuskohteiksi mm seuraavia tärkeitä asioita:

- taidot ymmärtää ja työskennellä koulumatematiikkaan kuuluvilla symboliesityksillä
- taidot omaksua koulumatematiikkaan sisältyvät sekä puhutun että kirjoitetun kielen muodot
- opettajan keskeisen roolin ohjatessaan opiskelijan oikein rakentuvia tiedollisia käsityksiä sekä tämän tiedon pysyvyyden varmistaminen
- matematiikan luokkahuoneen sosiaalisen yhteisön tärkeys sisältäen a) henkilöt, ihmissuhteet ja roolit, b) materiaaliset voimavarat, c) koulumatematiikan koko diskurssin sekä sisällön että kommunikoinnin luonteen mukaisesti. (Ernest 1994, 69–70.)

Edellä olevasta huomaamme, että sosiaalinen konstruktivismi sisällyttää itseensä hyvin laajasti matematiikanopetuksen kentän, joten tämänkin tutkimuksen luulisi helposti sopivan sen tutkimuksen piiriin. Kuitenkin Ernest itse huomauttaa, että se ei ole mikään kaiken kattava teoria, jonka sateenvarjon alle voisi koota monet sosiaaliset ja kulttuuriset teoriat. Hän esimerkiksi erottaa siitä sosiaalisen konstruktionismin ja post-strukturaaliset teoriat, sekä ajatteluun ja kognitiivisen psykologiaan kuuluvat sosiaaliset teoriat (Ernest 1994, 70).

Konstruktivistisen tieto- ja oppimiskäsityksen pohjalle rakentuva konstruktionismi lähtee siitä ajatuksesta, että yksilö ei luo tiedollisia käsityksiään muista riippumattomana yksilönä, vaan hänen tiedolliset käsityksensä riippuvat yhteisöstä ja sille ominaisesta tavasta käyttää inhimillistä kieltä (Puolimatka 2002b, 69.) Tärkeää konstruktionismissa on myös ajatus ideaalista, runsaasti teknologiaa sisältävästä ja kulttuurillisesti läpinäkyvästä oppimisympäristöstä. Siinä lähdetään myös siitä ajatuksesta, että oppiminen tapahtuu parhaimmillaan sosiaalisessa ympäristössä (Enkenberg 2002, 164.)

Marton ja Neuman (1989) pohtivat konstruktivismiin sisältyvää dualistista ontologista ja epistemologista piirrettä. Heidän mukaansa konstruktivismissa oletetaan, että ajattelu tapahtuu yksilön sisäisessä maailmassa erillään ulkoisesta objektiivisesta reaalisesta maailmasta ja tieto rakentuu sitten yksilön materiaalisten ja henkisten toimintojen kautta. Nyt fenomenologisessa viitekehyksessä, jota he edustavat, vallitsee perustavaa laatua oleva ykseys ihmisen ja häntä ympäröivän maailman välillä. Siksi tieto edustaa Martonille ja Neumanille (1989) tapaa nähdä, kokea tai ajatella ympäröivää maailmaa, ja se on aina rakentunut sisäisessä suhteessa kokijan (subject) ja kokemuksen (object) välillä. (Marton & Neuman 1989, 35.)

Tämän jälkeen he päätyvät vertaamaan yksinkertaisia aritmeettisia laskutehtäviä ja niiden osaamisesta tekemäänsä tulkintaa radikaalissa konstruktivismissa esitettyihin tulkintoihin. Tutkimuksessaan, joka on luonteeltaan fenomenografinen, mutta jonka he laskevat kuuluvan konstitutionalismin piiriin, he päätyvät päinvastaiseen tulkintaan kuin radikaalit konstruktivistit. Kun Martonin ja Neumanin (1989) mukaan Steffe et al. (1983) pitävät yksinkertaisissa aritmeettisissa laskutehtävissä ”kaksoislaskemista” edistyneimpänä laskemisen tapana, niin he päätyvät tulkintaan, jossa tämä tapa laskea johtaa matemaattisiin vaikeuksiin. ”Kaksoislaskemisella” tarkoitetaan yhteen- ja vähennyslakutapaa, jossa esim. tehtävässä 8+5 laskija mielessään tai vaikkapa ääneen laskee 9,10,11,12,13 ja samalla jollakin tavalla laskee sen, että etenee viisi yksikköä eteenpäin sen sijaan, että laskisi esim. 8+5= 8+2+3=13.

Kun sosiaalinen konstruktionismi puhuu Puolimatkan (2002b, 73) mukaan yksilön tiedollisten rakenteiden kehittymisen yhteisöllisistä ehdoista, niin sosiaalinen konstruktivismi puolestaan puhuu yhteisöllisten tiedon muotojen kuten tieteellisen tiedon kehittymisen ehdoista. Tässä yhteydessä valitsen vielä yhden näkemyksen sosiaalisesta konstruktivismista ja esittelen sitä hiukan tarkemmin. Nimittäin Cobb, Yackel ja Wood (1992) esittävät ansiokkaasti yhden vaihtoehdon konstruktivistiseen matematiikan opetuksen teoriaan.

Ensinnäkin he toteavat, että kouluttajat lähes universaalisti hyväksyvät sen seikan, että oppiminen on konstruktivistinen prosessi. Niinpä opetussuunnitelman tekijöidenkin pitäisi pyrkiä varmistamaan, että oppilaiden matemaattisia merkityksiä ja rakenteita tuetaan ymmärrettävällä ja selkeällä ulkoisella materiaalilla. Matematiikkaa opitaan sitten näistä ulkoisista keskeisistä malleista ja opetuksellisista esityksistä. Silloin oppiminen voidaan nähdä prosessina, jossa oppilas vähitellen rakentaa henkisiä rakenteita, jotka heijastelevat matemaattisten piirteiden ulkoisia esityksiä. Nyt Cobb, Yackel ja Wood näkevät tässä ajatustavassa hyvänä puolena sen, että sillä on tiettyä selitysvoimaa. Samalla pystymme kommunikoimaan ja keskustelemaan matemaattisista rakenteista ja suhteista toistemme kanssa. (Cobb, Yackel & Wood 1992.)

Edelleen em. tutkijat väittävät, että kun matematiikka nähdään sekä yksilön että yhteisön toimintana voidaan konstruktivismin vastakohtaisuudet voittaa ja samalla sen totuudellisuus lisääntyy. Tässä kohtaa he listaavat joukon käytännöllisiä ehtoja, jotka pitää ottaa huomioon heidän konstruktivistisessa ajatusmallissa, ja niitä ovat:

1. *Opetuksen päämäärä on auttaa opiskelijaa luomaan henkisiä rakenteita, jotka täsmällisesti ja oikein kuvaavat matemaattisia suhteita. Nämä suhteet löytyvät siis mielen ulkopuolelta opetuksellisista esityksistä.*
2. *Menetelmä. jolla tämä päämäärä saavutetaan, on kehittää selkeitä (transparent) opetuksellisia esityksiä, jotka mahdollistavat opiskelijoille heidän omien oikeiden sisäisten rakenteiden rakentumisen.*
3. *Ulkoiset opetukselliset materiaalit, jotka opiskelijoille esitellään, ovat ensisijainen perusta heidän matemaattisen tiedon rakentumiselle.*

(Cobb, Yackel & Wood 1992, 3–4.)

Cobb, Yackel ja Wood toteavat, että edellä esitetyt kolme lähestymistapaa ovat kaikki esimerkkejä esittävästä opetuksen lähestymistavasta (*instructional representation approach*). Esimerkiksi he ottavat aritmeettisen laskutaidon, jossa lukujen paikka-arvoa ja kirjoitettuja algoritmeja kuvaamaan otetaan avuksi Dienesin kuutiot. Siinä näkyvän konkreettisen esityksen lukujen paikka-arvosta oletetaan olevan perusta oppilaan sisäiselle esitykselle luvuista, niiden suhteista ja laskualgoritmeista. Mutta opetuksellinen materiaali, joka oli selkeää (transparent) opettajalle itselleen, ei ollutkaan sitä samaa oppilaalle. (ks. Holt 1982.) Näytti siltä, että vain lapset, jotka ennestään osasivat lukujen paikka-arvon, näkivät yhteyden kirjoitettujen numeroiden ja Dienesin kuutioiden ja palikoiden välillä. Cobb, Yackel ja Wood (1992, 5) päätyvät siihen ristiriitaan, että rakentaakseen oman oikean sisäisen matemaattisen rakenteensa ulkoisen tätä rakennetta kuvaavan mallin avulla, oppilaalla on oltava apuna nämä matemaattiset suhteet jo etukäteen. Miten sitten oppilas saisi selkoa ja tunnistaisi matemaattisia suhteita, jotka ovat monimutkaisempia kuin ne, jotka hän on jo omaksunut? Cobb, Yackel ja Wood (1992) toteavatkin sen mahdottomaksi, jos oppilas jätetään vain tutkimaan materiaaleja ilman ulkopuolista apua. Avuksi tulee opettaja, jonka rooli on auttaa oppilasta rakentamaan omia matemaattisen ymmärryksen rakenteita esittelemällä niitä helpolla ja ymmärrettävällä tavalla. (Ks. myös Lehto 2005, 12.)

Lisäksi Cobb, Yackel ja Wood (1992) toteavat, että kun myönnetään opettajan rooli oppimisessa, samalla myönnetään sosiaalisen interaktion tärkeys oppilaan matemaattisessa oppimisessa. Edellä mainitun oppimisen ristiriidan voikin käytännössä välttää, kun opettaja näkee ulkoisen materiaalin ja oppilaan osaamisen yli ja ohjaa oppilasta aktiivisesti käyttämään materiaaleja ja samalla kommunikoimaan luokan sosiaalisessa yhteydessä. Silloin materiaali ei enää edustakaan vain ymmärrettäviä matemaattisia suhteita, vaan siitä tulee väline, jonka avulla opettaja ja oppilaat voivat esittää ja tehdä selkoa omasta matemaattisesta ajattelustaan. (Cobb, Yackel & Wood 1992.)

Myös Bonotto (2009) korostaa opetus-oppimisympäristön varustamista sopivilla ulkoisilla artifakteilla, jotka samalla voivat edustaa ulkoisen maailman mahdollisia normeja ja tapoja. Samalla opetusmenetelmien pitää olla interaktiivisia. Tällä tavoin saadaan mielekäs lähestymistapa matemaattiseen mallintamiseen ja ongelmanasetteluun. (Bonotto 2009, 193.)

Lerman (1996) korostaa sosiaalisen oppimisen tärkeyttä (intersubjectivity) konstruktivistisessa paradigmassa. Hänen mukaansa tämä on ongelma radikaalissa konstruktivismissa, joka erottaa subjektin ja objektin. Sen sijaan Lermanin mukaan ihmisen tietoisuuden kehitys alkaa sosiaaliselta tasolta.

2.3 Oppiminen ja tiedon automatisoituminen

Oppimisessa on aina myös kyse tiedon organisoimisesta muistissa tai mielessä. Rauste-von Wright ym. (2003,90) mukaan tätä tiedon organisointia voidaan havainnollistaa vertaamalla asiantuntijan ja aloittelijan eli ekspertin ja noviisin tiedon rakenteita. Ekspertin tieto on organisoitunut laajoina ja monitasoisina toisiinsa kytkeytyneinä tietoverkkoina, kun taas noviisin tietorakenteet ovat tyypillisesti tiedon siruja, faktoja.

Tiedon organisaatiota muistissa tai mielessä on kuvattu perinteisesti assosiaation käsitteellä. Tapa juontaa juurensa jo Aristoteleen tavasta selittää kokemusten yhteenliittyminen silloin, kun ne ovat aiemmin esiintyneet yhdessä tai kun ne muistuttavat toisiaan. (Rauste-von Wright ym. 2003.) Myöhemmin tätä tiedon organisointia on kuvattu mm. skeeman käsitteellä, jonka Rauste-von Wright, von Wright ja Soini (2003, 91) kuvaavat yksilön kokemusten välityksellä rakentuneeksi sisäiseksi malliksi tietyn esine- tai tapahtumatyypin tyypillisistä tai olennaisista piirteistä. Tässä myös pätee se. että mitä paremmin ymmärrämme jonkin tapahtuman eli mitä kehittyneempi sitä koskeva skeema on, sitä helpompi on poimia valikoivasti sitä koskeva olennainen informaatio ja jättää muu informaatio huomioimatta (Rauste-von Wright ym. 2003, 111).

Skeemat ovat opittuja tietorakenteita, jotka ohjaavat havaintoja (Saariluoma 1990, 34). Saariluoman mukaan skeemateorian heikkous on siinä, että niiden avulla ei ole mahdollista selittää konkreettisten yksityistapausten mielikuvia. Edelleen hänen mukaansa skeemateoreetikot ajattelevatkin, että skeemat ovat vain yksi informaation käsittelyn taso.

Taito kohdistaa valikoivasti tarkkaavaisuutta tietyn toiminnan kannalta olennaisimpiin seikkoihin automatisoituu harjoittelun avulla (Rauste-von Wright ym. 2003). Tämä liittyy myös työmuistiin ja sen käyttöön. Työmuisti voidaan määrittää kyvyksi tuoda pitkäkestoisesta muistista kussakin tehtävässä tarvittava tieto ja strategia. Nämä voidaan yhdistää uuteen tietoon ja samalla tieto muokkautuu pitkäkestoiseen muistiin säilöttäväksi. (Baddeley 2000; Tam et al. 2010)

On olemassa useita oppimisen teorioita siitä, miten tietoisuuden aste vaihtelee prosessin eri vaiheissa (Näveri 2009). Tietoinen ajattelu ja ymmärtäminen eivät kuitenkaan oppimisessa riitä, vaan tarvitaan myös tiedon automatisoitumista. Automatisoitumisella tarkoitetaan sitä, että vakioisissa olosuhteissa tapahtuneen toiston ansiosta tehtävän suorittaminen helpottuu olennaisesti eikä se enää kuormita samalla tavalla muistia. (Saariluoma 1990; Näveri 2009, 23.) Näverin (2009) mukaan tällainen automatisoitunut tieto tulee perustua ymmärtävään kokemukseen ja hän erottaakin sen automatisoituneesta mekaanisesta laskemisesta.

Näveri (2009, 23) määritteleekin mekaanisen, rutiininomaisen oppimisen muistinvaraiseksi oppimiseksi, johon ei kuulu ymmärtävää komponenttia, ja siksi se on erotettava automatisoitumisesta. Siksi mekaanisen laskemisen vastakohta ei ole soveltaminen, vaan ymmärtävä laskeminen. Mielestäni Näverin määritelmä automatisoitumisesta ja sen erosta mekaaniseen laskemiseen on huomionarvoinen ja täsmällinen ja tässä tutkimuksessa sillä on tärkeä merkitys.

On huomattava, että automatisoitumisessa on mahdollista omaksua myös täysin vääriä toimintatapoja. Tässä tapauksessa avuksi tulee se, että edellä automatisoituminen määriteltiin ymmärryksen perustuvaksi.

Myös Pjotr Galperinin opetus-oppimisteoriassa, jossa oppiminen alkaa orientaatiovaiheesta, prosessi lyhenee ja päätyy automatisoitumiseen. Galperin kertoo työtoveriensa tutkimuksista ja tuloksista, jotka osoittavat, että *uusi tehtävä on helpoin suorittaa "esineillä", vaikeampi ääneen pohtimalla ja kaikkein vaikein itsekseen, "päässä"* (Galperin 1979, 31). Nämä kolme vaihetta on hänen mukaansa erityisen helppo erottaa esikoulu- ja alkeiskouluiässä. Myöhemmin esim. ääneen pohdinta voi jäädä pois ja lopputuloksena itse orientaatiotoiminta lyhenee ja prosessi automatisoituu.

2.4 Matemaattinen ajattelu ja ymmärtäminen

Yhden mallin oppimisesta ja opetuksesta ja niiden yhteydestä ymmärtämiseen antavat Hiebert ja Carpenter artikkelissaan "Learning and teaching with understanding", joka on julkaistu amerikkalaisessa matematiikan opetuksen ja oppimisen käsikirjassa vuodelta 1992. Siinä he ottavat lähtökohdaksi sen, että ajatellessamme ja kommunikoidessamme matemaattisilla käsitteillä (ideas), ne on aina esiteltävä jotenkin. Tämä esittäminen voi perustua puheeseen, kirjoitettuihin symboleihin, kuviin tai vaikkapa fyysisiin esineisiin. Yksi tietty matemaattinen ajatus (idea) voidaan esittää yhdellä tai vaikkapa kaikilla edellä mainituilla esitystavoilla, sillä on siis sekä ulkoinen että sisäinen esitystapa. Hiebert ja Carpenter tekevät sen johtopäätöksen, että näillä sisäisillä ja ulkoisilla esitystavoilla on keskinäinen riippuvuussuhde. Esimerkiksi toisen luokan oppilas voi kaksinumeroisen luvun käsitettä opiskellessaan työskennellä palikkajonolla, joka samalla hänen sisäiselle ajattelulleen edustaa enemmänkin kaikkia kaksinumeroisia lukuja kuin mielikuvaa juuri näistä kyseisistä palikoista. Samalla oppilas, joka harjoittele palikoiden avulla lukumääriä, saa näistä luvuista erilaisen sisäisen mielikuvan kuin oppilas, joka työskentelee vain kirjoitetuilla symboleilla.

Edelleen Hiebert ja Carpenter (1992) tekevät sen johtopäätöksen, että näitä ajattelun sisäisiä esityksiä (representations) voidaan yhdistellä, ja että niihin vaikuttavat ulkoiset aktiviteetit. Sisäisen ajattelun yhteyksiin voidaan vaikuttaa rakentamalla niitä kuvaavia ulkoisia malleja. Esimerkiksi kokonaisluvut voidaan esittää puheen tasolla, symboleilla tai 10-järjestelmäpalikoilla, jotka kaikki ovat siis ulkoisia esitystapoja, jotka vaikuttavat toisiinsa ja joilla on merkitystä, kun ajatellaan matematiikan ymmärtämistä. Ne tuottavat sisäiseen ymmärrykseen tietoverkkoja. Tässäkin lähdetään siis siitä ajatuksesta, että oppiminen lähtee ulkoisista malleista.

Nyt matemaattinen ymmärtäminen on määriteltävissä siten, että matemaattinen ajatus tai proseduuri on ymmärretty, jos sen henkinen esitystapa on osa sisäisiä ymmärryksen verkkoja. Lisäksi ymmärryksen aste riippuu yhteyksien määrästä ja voimasta. "Matemaattinen ajatus, proseduuri tai fakta on ymmärretty perusteellisesti silloin, kun se liittyy olemassa oleviin tietoverkkoihin vahvemmilla ja lukuisammilla yhteyksillä" (Hiebert & Carpenter 1992, 67.) Esimerkki tästä voidaan edelleen käyttää 10-järjestelmävälineiden ja kokonaislukujen kirjoitusasun välistä yhteyttä. Kun otetaankin yksiköksi 10 palan muodostama 10-sauva, niin loput kymppisauvat automaattisesti edustavat muita tasakymppejä. Tällöin on helppo tehdä vertailuja tietyn kokoisten palikkapattereiden ja kirjoitettujen lukusymboleiden välillä. Päämääränä on, että yhdistellessään erilaisia lukumäärien esityksiä tai laskutoimituksia palikkapattereilla, oppilas samalla rakentaa tiedossaan sillan näiden lukumäärien, palikkaesitysten ja kirjoitettujen symboleiden välille. Kun numeroiden suhteet sitten ovat selvinneet, kun ne osataan nähdä sisältävän eri määrän kymppejä, yhteys konkreettisiin palikkajärjestelmiin tulee tarpeettomaksi. (Hiebert & Carpenter 1992, 68.)

Edelleen Hiebert & Carpenter (1992) näkevät, että ymmärtäminen lisää oppilaiden kykyä muistaa oppimaansa ja sen siirtämistä uusiin tilanteisiin. Heidän mukaansa on yleisesti hyväksytty se, että oppilaat pikemminkin rakentavat itse omaa matemaattista tietoaan kuin saavat sen valmiina opettajalta tai oppikirjasta. Mutta oppilaiden omatkaan keksinnöt eivät aina johda tuotteliaaseen ja tehokkaaseen matematiikkaan. Siihen johtaa se, että henkiset sisäistykset ovat monipuolisesti yhteydessä tietoverkkoon, joka lisäksi assosioi muun tietoverkon kanssa runsaalla tavalla. Ymmärrys siis lisää ymmärrystä, lumipalloefektin tavoin. Lisäksi on huomattava, että ymmärtäminen lisää myös asioiden muistamista. Samoin se tietenkin edistää uuden oppimista. (Hiebert & Carpenter 1992, 74.)

He myös määrittelevät konseptuaalisen ja proseduraalisen tiedon. Konseptuaalinen tieto on osa yksilön tietoverkkoja ja sillä on runsaasti yhteyksiä tähän tiedon verkostoon. Toisaalta Hiebert ja Carpenter (1992, 78) määrittelevät proseduraalisen tiedon sarjaksi toimintoja. Nyt minimivaatimus sille, että myös proseduurille syntyy sisäinen esitys tai yhteys tiedon verkkoihin on se, että näitä ko. yhteyksiä on riittävästi sille, että oppilas suoriutuu proseduurin vaatimista toimenpiteistä. Hän esimerkiksi osaa laskea laskun algoritmin avulla. Usein tätä on koulussa edeltänyt sarja vaiheittaista kirjoitetun symbolien opiskelua.

Matemaattiset oliot voidaan nähdä myös abstrakteina, joita käsitellään representaatioiden välityksellä (Merenluoto 2001.) Esim. piirretty tai kirjoitettu luku 2 voi edustaa jotakin oliota, jota on kaksi kappaletta. Tällöin se on representaatio kardinaaliluvusta. Mutta itse luvun voi piirtää ja mallintaa monella tavalla. Merenluodon (2001, 25) mukaan alkeismatematiikassa on kyse konkreettisten objektien avulla tuotetuista representaatioista. Näin voidaan abstrahoida lukumäärään, paljouteen, järjestykseen ja operaatioihin liittyviä abstraktioita. Korkeamman matematiikan alueella taas oppilas käsitteeseen tutustuessaan abstrahoi yhteisen ominaisuuden, tietyn säännönmukaisuuden tai operaation yleisemmällä tasolla, ei enää konkreettisten objektien avulla. Siis sama matemaattinen olio voidaan esittää useammalla representaatiolla.

Schoenfeldin (1994) mukaan matematiikka matemaatikon näkökulmasta koostuu puhtaasta matematiikasta, matematiikan opiskelusta ja matematiikan tuottamisesta (doing mathematics). Aivan samoin kuin tieteessä yleensä niin matematiikassakin on kysymys siitä, että tehdään asioita järkevästi. Matematiikassa se tarkoittaa erityisesti työskentelyä symboleilla ja järkevää päättelyä, jolla asiat yhdistetään toisiinsa. Lisäksi aivan kuten "tieteen" tekeminenkin niin matematiikan harjoittaminen voidaan nähdä enemmän sosiaalisena toimintana kuin yksilön tekemisenä. (Schoenfeld 1994, 55–56.)

Edelleen hänen mukaansa jos matematiikkaa opetetaan kuivasti, yksipuolisesti, tietona, joka vain saadaan, se opitaan ja (myös unohdetaan tai jätetään käyttämättä) tällä samalla tavalla. Kuitenkin jos opiskelijalla on omia kokemuksia matematiikasta, se kannustaa häntä oppimaan. Matematiikan opetuksen ja luokkahuoneen aktiviteettien pitää kannustaa oppilaita kehittämään omaa ymmärrystään matematiikasta. Sellainen opiskelu on usein käsin kosketeltavaa, empiiristä aktiivisuutta, ja siihen liittyy tärkeänä osana matemaattinen kommunikointi. Tämä kommunikointi kasvaa, kun matemaattisia ongelmia ratkotaan kollektiivisesti, yhdessä pohtien selityksiä ilmiöille. Tällä tavoin matemaattinen ajattelu osoittaa voimansa ja arvonsa ja opiskeluympäristö pitää rakentaa sen mukaisesti. (Schoenfeld 1994.)

Oppimista ja opetusta ymmärtäen tutkivat myös Hiebert ja Wearne (1992), ja heidän tutkimuksensa koski konseptuaalisesti ohjattua paikka-arvojen ja kaksinumeroisten yhteen- ja vähennyslaskujen opetusta neljällä ensimmäisellä luokalla verrattuna kahteen ensiluokkaan, jossa oli käytössä perinteisempi oppikirjaan pohjautuva ohjaus. He olettivat, että erilaiset tavat tukea oppilaan ymmärrystä monilla eri esitystavoilla muodostavat yhden hyvän tavan opettaa ymmärtäen. Se oli mahdollista matematiikan tuntien rajallisuudesta huolimatta, eikä vaihtoehtoinen ymmärrykseen tähtäävä opetus vähentänyt oppilaiden suoriutumista rutiinitehtävissä pienemmästä harjoitusajasta huolimatta. Heidän mukaansa ymmärtäminen ei siirry suoraan proseduureihin, mutta se lisää näiden proseduurien joustavuutta ja tehokkuutta. Lisäksi tätä ymmärtämistä lisää siis välineellinen ympäristö, kun ohjaus suunnataan pikemminkin ymmärryksen kuin proseduurien sujuvuuden suuntaan. (Hiebert & Wearne 1992.)

Pirie ja Kieren tutkivat murtoluvun käsitettä ja ymmärryksen kasvua ja kehittivät sen pohjalta oman mallinsa matemaattiseen ymmärrykseen. (Kieren & Pirie 1991; Pirie & Kieren 1992a, 1994.) Ensinnäkin he toteavat, että konstruktivismia ei pidä nähdä pelkästään siinä valossa, että opiskelija varustetaan manipulatiiveilla, fyysisillä esineillä, joilla tämä sitten rakentaa itselleen annetun matemaattisen käsitteen (idea). Vaikka opiskelijan matemaattinen ymmärtäminen riippuu hänen kokemuksistaan, tässä kokemuksessa objektien ei tarvitse välttämättä olla fyysisiä. (Pirie & Kieren 1992b, 505.)

Sen sijaan opettajan tulee ymmärtää, että jokaisen henkilön matemaattinen ymmärrys on ainutlaatuinen, ja siksi ei ole olemassa ulkoisia matemaattisen ymmärryksen rakenteita, jotka kaikki voisivat omaksua samalla tavalla. Opettajan on luotava oppilaalle ympäristö, joka optimoi hänen mahdollisuutensa rakentaa omaa ymmärrystään. Siinä opettaja on vapaa valitsemaan monista erilaisista ohjaavista toimenpiteistä juuri ne, jotka hyödyttävät tiettyä oppilasta parhaiten. (Pirie & Kieren 1992b, 526.)

2.5 Tutkimuksia konkreettisen materiaalin käytöstä matematiikan opetuksessa

Kuten edellä on huomattu, matematiikan opetuksessa konkreettiset fyysiset esinemallit ovat tärkeitä, kun opiskellaan matematiikkaa ymmärtäen. Tässä alaluvussa käydään läpi joitakin tutkimuksia, joissa on tutkittu nimenomaan konkreettisten mallien ja toimintamateriaalin vaikutusta matematiikan oppimiseen.

Unkarilaissyntyinen Zoltan Dienes oli mukana Englannissa ja Walesissa 1966 toteutetussa laajassa tutkimuksessa, jonka päämääränä oli arvioida sellaisia uusia aritmetiikan metodeja, jotka mahdollistaisivat paremman ymmärtämisen ja suotuisamman asenteen aritmetiikkaa ja matematiikkaa kohtaan yleisemminkin. Opetuksen metodit jaoteltiin traditionaalisen metodiin, jossa havainnollistetaan vähemmän aritmetiikan rakenteita, mutta pyritään omaksumaan ne enemmän drillauksen ja mekaanisen työn avulla. Seuraavaksi nimettiin strukturaalisiksi metodeiksi ne menetelmät, joissa loogiset rakenteet havainnollistetaan konkreettisin materiaalein ja analogioin. Näitä metodeja oli kaksi: uni-model, kuten Cruisenaire ja Stern, joissa lapsi saa tarvitessaan käyttöönsä yhden konkreettisen mallin, kuten palikkasauvat tai palikat (rods or blocks); sekä multi-model, kuten Dienesin materiaali. Siinä useita tyypiltään erilaisia konkreettisia analogioita käytetään havainnollistamaan matematiikan rakenteita siten, että lapsi saa näistä rakenteista mahdollisuuden rakentaa itselleen abstraktin koodaussysteemin. (Dienes 1966, 60.) Lisäksi voidaan puhua lapsen luonnollisesta kiinnostuksesta lukuihin liittyviin tilanteisiin eli motivaation metodeista.

Dienesin materiaaliin kuuluvat paitsi fyysiset palikat tai kolmiolevyt, joilla voidaan havainnollistaa esim. potenssimerkintöjä (palikoita on kahta kokoa eli 1:2 sekä eri värejä), niin myös erilaiset symboliset pelit. Peleinä voi toimia esim. ristinollatyyppiset pelit tai sitten pelit, joilla pyritään abstrahoimaan esim. laskemiseen liittyviä taitoja. (Dienes & Golding, 1974.)

Tutkimukseen otti osaa yli 4500 kymenvuotiasta oppilasta, ja osoittautui, että parhaat tulokset uni-model -menetelmällä saavuttivat kaikkein älykkäimmät lapset. Muutoin ei uni-model -menetelmällä saavutuksissa ollut käytännössä eroa traditionaaliseen metodiin verrattuna suorituksissa eikä asenteissakaan. (Dienes 1966, 61.)

Multi-model -menetelmää tutkittiin vain yhdessä koulussa, mutta kumulatiivisia vaikutuksia tutkittiin yli kahden vuoden ajan. Dienes -metodilla opetetuilla lapsilla ei havaittu eroja kontrolliryhmään kielellisessä kyvykkyydessä, mutta mekaanisessa ja käsitteellisessä aritmetiikassa tulokset olivat merkittävästi parempia. Heillä oli myös suotuisampi asenne matematiikkaa kohtaan. Tuloksista Dienes päätyi tekemään seuraavat johtopäätökset:

1) Uni-model -menetelmät (Cruisenaire ja Stern) eivät näytä antavan yhtään perinteistä opetusta parempia välineitä aritmetiikan käsitteelliseen ymmär-

tämiseen. Myöskään ne eivät näytä parantavan oppilaan asennetta matematiikkaa kohtaan. Vaikkakin oli näyttöä siitä, että tällainen yksittäinen konkreettisen koodaussysteemi auttoi laskemisessa, niin se ei ollut tarpeeksi radikaali apu johtaakseen korkeampaan ymmärrykseen (paitsi korkean älykkyyden omaavilla pojilla)

2) Kehittyneet ja yleistykseen pyrkivät matematiikan koodaussysteemit, ja perustavavanlaatuinen ymmärtäminen, kehittyvät parhaiten kokemuksilla, joita tarjoavat multi-model -menetelmät. Siis menetelmillä, jotka vaihtelevat laadultaan ja ymmärrettävyydeltään, mutta jotka tarjoavat loogisesti isomorfisia kokemuksia. Eniten näistä metodeista hyötyvät heikoimmat oppilaat.

(Dienes 1966, 61–62.)

Sinikka Lindgren (1990) tutki väitöskirjassaan toimintamateriaalin käyttöä matematiikan opiskelussa peruskoulun toisella luokalla. Lindgrenin mukaan toiminta – learning by doing – vaatii välineitä, materiaalia, jonka avulla oppiminen tapahtuu. Hän nimittää toimintamateriaaliksi sitä konkreettista materiaalia, jota oppilas saa itse kosketella ja käyttää opiskellessaan matematiikan käsitteitä ja operaatioita. Käytetty materiaali oli erilaisia pelejä ja Montessori-tyyppisiä opetusvälineitä. Toiminta tapahtui ns. matikkatupakokeiluna. (Lindgren 1990, 175.)

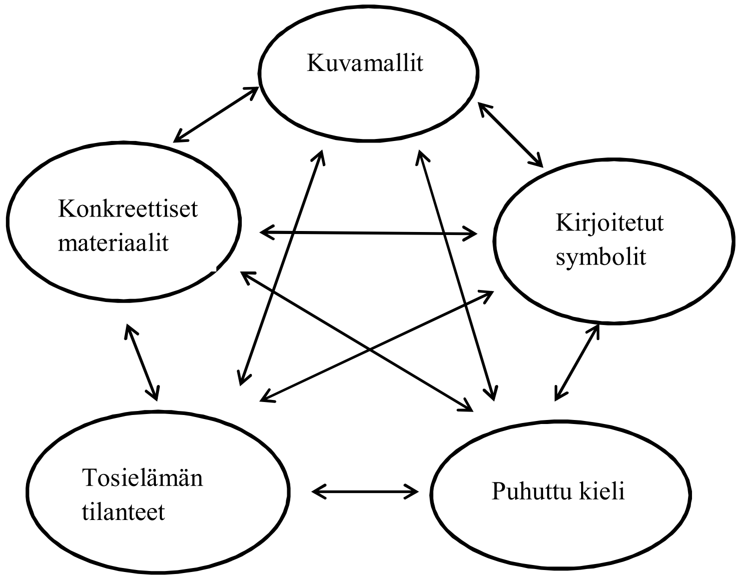
Lindgrenin mukaan matikkatupakokeilussa työskennelleet oppilaat kiinnostuivat matematiikasta uudella tavalla (Lindgren 1990, 175). Lindgrenin tutkimuksen rajoite on mielestäni sen lyhyt kesto. Toimintamateriaalin käyttö oli vain kymmenen tuntia kestänyt kokeiluohjelma, jolloin oppilaat saivat kerran viikossa työskennellä matikkatuvassa vapaasti valitsemillaan materiaaleilla kontrolliryhmän opiskellessa perinteisellä tavalla omassa luokassaan (Lindgren 1990, 175–176). Lindgren totesi matikkatupakokeilunsa loppupäätelmäksi sen, että sekä hyvät että heikot oppilaat tarvitsevat opettajan apua kehittävän työtavan löytämiseksi. Edelleen hän toteaa, että huolellisesti ja tarkoituksenmukaisesti valitun toimintamateriaalin käyttö edistää selvästi uusien matematiikan käsitteiden sisäistämistä ja hallintaa. (Lindgren 1990, 179–180.)

Yhdysvalloissa kehitettiin 1990-luvulla standardoituun opetussuunnitelmaan perustuva, mutta muotoilultaan ja yksityiskohdiltaan erilainen opetussuunnitelma ala-asteen matematiikkaa varten (Fuson 2000). Menetelmä kehitettiin Chicagon yliopiston Koulumatematiikan projektissa, ja tavoitteena oli mm. perinteisen tekstikirjan ohjeiden sijaan tarjota oppilaille mahdollisuus järkevään käsitteiden ja menetelmien tutkimiseen sekä mielekkääseen ongelmanratkaisuun. Oppitunnit pyrittiin rakentamaan niin, että yhteys oppilaan jokapäiväisiin kokemuksiin säilyi. Opettajia neuvottiin tarjoamaan oppilaiden käyttöön monille tunneille apuvälineitä, sellaisia kuin palikkajonoja (pattern blocks) ja satalevyjä (hundred grids). Yhdessä kynän ja paperin kanssa niiden piti olla oppilaiden apuna käsitteiden ja menetelmien omaksumisessa. Oppilaita myös rohkaistiin keskustelemaan ratkaisuistaan. (Fuson 2000, 2–3.)

Opetussuunnitelmaa kutsuttiin nimellä Everyday Mathematics (EM), ja sen käytöstä on tehty lukuisa joukko tutkimuksia. Fusonin (2000, 2) mukaan monet tutkijat raportoivat kokeilun positiivisista vaikutuksista oppilaiden ymmärrykseen ja saavutuksiin. Hänen omassa tutkimuksessaan 2. ja 3. luokan oppilailla EM-opetussuunnitelmaan osallistuneet toisen luokan oppilaat selvisivät numeroälyä (number sense) mittaavassa testissä paremmin kuin oppilaat, joiden opiskelu perustui traditionaaliseen oppikirjaaan. Myös kolmannen luokan oppilaat selvisivät vertailuryhmää paremmin numeroiden paikkajärjestelmää, päättelyä, geometriaa, tietoa ja sanallisia ongelmia sisältäviä tehtäviä ratkoessaan. (Fuson 2000, 11.)

Horne ja Livy (2006) raportoivat tutkimuksestaan, joka oli osa laajempaa australialaista ENRP-projektia, ja jossa he tarkastelivat paikka-arvon kehittymistä. He perustivat paikka-arvon kehittymisen neljään eri osa-alueeseen, nimittäin luvun lukemiseen, kirjoittamiseen, lukujen välisen järjestyksen ymmärtämiseen ja lukujen tulkitsemiseen esim. konkreettisen materiaaliin perustuen (read, write, order and interpret numbers). He saivat tulokseksi, että noin viidesosalla 1. luokan aloittavista oppilaista oli käytössä nämä kaikki neljä osa-aluetta. Verrattaessa osa-alueita toisiinsa, niiden kehittymisessä ei näyttänyt olevan selkeää yhteneväisyyttä, vaikkakin lasten näytti olevan vaikeampaa muodostaa luku kymppisauvojen avulla kuin lukea, kirjoittaa tai järjestää kaksinumeroisia lukuja suuruusjärjestykseen. (Horne, M. & Livy, S. 2006.)

Suomessa konkreettisen materiaalin eli toimintamateriaalin käytöstä opetuksessa raportoi Häggblom (2004). Hänen mukaansa toimintamateriaalin käyttöä on kehitetty monia vuosia Suomen alakouluissa ja ne on myös esitetty erityisellä tavalla uudessa opetussuunnitelmassa. Hänen mukaansa tärkeä osa käsitteen ymmärtämisessä on Leshin, Postin ja Behrin (1987) esittämä viiden esitystavan systeemi, joka on esitetty kuviossa 1. Oppilaan on saatava kokemuksia kaikista näistä esitystavoista. Manipulatiiviset mallit mahdollistavat Häggblomin mukaan niin puhutun kielen kuin todellisen maailmankin välisen yhteistyön. Yhteys manipulatiivisista malleista staattisiin piirustuksiin sisältää myös huomioinnit ja tulokset. Tämä yhteys myös mahdollistaa matematiikan kirjoittamisen ja se kehittää myös matematiikan ymmärtämistä.



Kuvio 1. Käsitteen ymmärtämisen viisi eri esitystapaa. (Lesh, Post & Behr 1987, 33–34)

Edelleen Häggblomin (2004) mukaan kaikki lapset tarvitsevat fyysisiä ja kuvallisia malleja selvittämään ajatteluaan opiskeltaessa uutta käsitettä. Kun lapselle esitetään uusi tehtävä, hän voi selventää sitä omalla piirustuksellaan. Tässä tilanteessa puhuttu kieli kasvaa sillaksi konkreettisen materiaalin ja abstraktin ajattelun välille. Toimintamateriaali on lapselle työkalu, jonka avulla hän ymmärtää ja voi kommunikoida matematiikan opiskelussaan. (Häggblom 2004, 44–45).

Toinen konkreettisen materiaalin käyttöä suomalaisissa kouluissa edistänyt hanke on 'unkarilaisen matematiikan' tuominen suomalaisiin kouluihin. Näätäsen (2004) mukaan tyypillisessä suomalaisessa koulussa keskitytään peruslaskutoimituksiin numeroilla ja yritetään nopeasti edetä suuriin numeroihin. Unkarilainen matematiikan opetuksen ajatus on leveämpi ja se tähtää siihen, että pienetkin lapset voivat oppia matemaattisia käsitteitä laajemmalla pohjalla. Tämä edistyminen konkreettisesta abstraktiin saavutetaan Näätäsen (2004, 93) mukaan ottamalla tukea manipulatiiveista. Ne puolestaan jätetään pois käytöstä, kun niitä ei enää tarvita.

Näätäsen mukaan unkarilainen menetelmä kehitettiin alakoulun matematiikan opetukseen ja sen kehittäjiä olivat T. Varga kollegoineen. Metodiin kuuluu paljon manipulatiivien käyttöä. Suomessa sitä on edistetty kursittamalla opettajia ja jakamalla ilmaista opetusmateriaalia suomalaisessa matematiikan opetukseen keskittyvässä Solmu-lehdessä. (Näätänen 2004, 92).

Tikkanen (2008) tutki ja vertasi unkarilaisia ja suomalaisia neljännen luokan oppilaita, joita molempia opetettiin unkarilaisella Varga-Neméyi menetelmällä. Perusopetuksen oppilailla oli myönteiset matematiikka-asenteet, uskomukset matematiikasta ja sen oppimisesta ja opetuksesta. Lisäksi oppilailla oli myönteinen käsitys itsestään matematiikan oppijana.

Manipulatiivien eli toimintamateriaalin käytöstä voidaan vielä mainita yhdysvaltalainen Dominon ja Schroederin (2011) metatutkimus, jonka tarkastelun kohteena oli 31 tutkimusta vuosien 1989 ja 2010 väliltä. Siinä päädyttiin tulokseen, jonka mukaan ala-asteen oppilaat, jotka käyttivät toimintamateriaalia opiskelussaan apuna, suoriutuivat tilastollisesti merkittävästi paremmin testeissä kuin sellaiset oppilaat, jotka eivät sitä käyttäneet.

3 Oppimispsykologista taustaa

Tässä luvussa luodaan tutkimukselle oppimispsykologista pohjaa ja esitellään keskeisenä vaikkakin vanhana teoriana sveitsiläisen biologin Jean Piaget'n teoria lapsen kognitiivisen kehityksen vaiheista ja myöhemmin hänen teoriansa lukukäsitteen kehittymisestä. Se on mielenkiintoinen jo historiallisesti ajatellen, vaikka tässä tutkimuksessa nojaankin enemmän uudempiin angloamerikkalaisiin tutkimustuloksiin, erityisesti Fusonin ja mm. Carpenterin ja Moserin tutkimuksiin ja teorioihin. Lisäksi esitellään Vygotskyn teoriaa ja sitä täydennetään hänen oppilaansa ja työtoverinsa Pjotr Galperinin opetus-oppimisteorialla.

3.1 Kognitiivisen kehityksen vaiheittaisuus

Sveitsiläisen biologin Jean Piaget`n analyysi kognitiivisesta kehityksestä on ollut keskeinen teoria kognitiivisen psykologian kehityksessä. Piaget kutsui itseään geneettiseksi epistemologiksi ja julkaisi artikkeleita ja kirjoja seitsemällä vuosikymmenellä (Reilly & Lewis,1983, 56–57). Piaget`n mallin ydin on ajatus siitä, että kognitio on yksi organismin ja ympäristön välinen sopeutumisen muoto koko elävässä luonnossa. Lapsi, kuten aikuinenkin, yrittää aktiivisesti hahmottaa maailmaa ja sopeutua siihen. (Meadows 1993, 198.)

Piaget`n mukaan sopeutuminen kognitiivisessa kehityksessä tapahtuu assimilaation tai akkommodaation avulla. Assimilaatiossa ulkoinen elementti, esim. objekti tai tapahtuma, liitetään yksilön senso-motoriseen tai käsitteelliseen skeemaan, tiedon rakenteeseen (Piaget 1985, 5). Se voi tarkoittaa myös sisäisen tiedon rakenteen tai ala-rakenteen välistä vuorovaikutusta. Siinä siis uusi tieto liitetään jo olemassa olevaan tiedon rakenteeseen ja ymmärrykseen. Akkommodaatiossa taas uusi ulkoinen tieto pakottaa kehittämään uusia parempia tiedon rakenteita puutteellisten rakenteiden tilalle. Se on aina toissijainen verrattuna assimilaatioon (Piaget 1985, 6). Nämä kaksi kognitiivista prosessia toimivat läpi elämän, uuden tiedon assimilaatio johtaa aina jonkin asteiseen tiedon akkommodaatioon. (Meadows 1993, 198–199; Meadows 2006.)

Edelleen keskeisiä käsitteitä Piaget`n teoriassa ovat ekvilibraatio, konservaatio ja transformaatio. Ekvilibraatio on prosessi, joka tasapainottaa sekä assimilaatiota että akkommodaatiota, kun nämä muokkaavat toisiaan. Konservaatio puolestaan auttaa lasta ymmärtämään esineiden muodonmuutoksia ja rakenteen tai määrän säilyvyyttä. Esimerkiksi rakennuspalikoiden määrä ei muutu, vaikka niiden järjestys sekoitetaan. (Reilly & Lewis 1983, 61–63.) Ekvilibraatio assimilaation ja akkommodaation välillä voi olla monen tasoista tai jopa puutteellista. Ajattelun alkuvaiheissa lapsen oma mahdollisuus akkommodaatioon yhä koostuu hänen havainnoistaan todellisuudesta eikä hänellä ole mahdollisuutta transformaatioon. Vasta seitsemän tai kahdeksan vuoden iässä operaatioiden käänteisyys varmistaa harmonisen assimilaation ja akkommodaation. (Piaget 2000, 43–44; Piaget1985; Piaget 1978.) Tätä operaatioiden käänteisyyttä lapsi tarvitsee esimerkiksi ymmärtäessään yhteen- ja vähennyslaskun yhteyden.

Kun kaikki tieto hankitaan assimilaation ja akkommodaation kautta, on kehityksen oltava vaiheittaista. Voimme siksi olettaa, että on olemassa kehityksen eri vaiheita (Piaget 2000, 44). Kognitiivisella vaiheella Piaget tarkoittaa niitä kognitiivisia rakenteita, henkisiä operaatioita ja skeemoja, jotka esiintyvät tietyn ikäisillä lapsilla eroten laadullisesti tietyn toisen ikäryhmän vastaavista rakenteista (Reilly & Lewis 1983, 66–67). Esimerkiksi 5-vuotiaan ajattelu eroaa 7-vuotiaan ajattelusta. Vaiheiden ajatellaan seuraavan toisiaan järjestyksessä, vaikka eri vaiheeseen siirtymisen ikä voikin vaihdella eri lapsilla. (Reilly & Lewis 1983, 66–67.)

Piaget`n ajattelun mukaan kognitiivinen kehitys käy läpi seuraavat neljä vaihetta jopa niin, että kehitys on samanlaista kaikkialla maailmassa. Vaiheet ovat: sensomotorinen kausi (kaksivuotiaaksi asti), preoperationaalinen kausi (kahdesta seitsemään vuotta), konkreettisten operaatioiden kausi (seitsemästä yhteentoista) ja formaalisten operaatioiden kausi (11-vuotiaasta ylöspäin). (Reilly & Lewis 1983, 66–78.) Tämän tutkimuksen kannalta ovat erityisen kiinnostavia ikävuodet seitsemän–yhdeksän, johon vaiheeseen myös sattuu preoperationaalisen kauden vaihtuminen konkreettisten operaatioiden kaudeksi. Juuri tähän vaiheeseen kouluopetuksessa olisi siis hyvä liittää konkreettisen materiaalin käyttö opetuksen apuna. Se auttaisi lapsen ajattelua, joka ei ole vielä saavuttanut formaalisten operaatioiden kautta. Toisaalta esim. Hautamäen (1984) tutkimuksesta selviää, että lapset siirtyvät hyvin eri-ikäisinä juuri kyseisen formaalisten operaatioiden käyttöön. Osa peruskoululaisista ei saavuta kouluaikanaan tätä tavoitetta.

Piaget`n teoriaa ajattelun rakenteista on kritisoitu. Ensimmäinen ongelma on rakenteiden teoreettinen luonne. On vaikea sijoittaa rakenteita lapsen ajatteluun. Piaget ajatteli ajattelun perustuvan neuropsykologiaan sisältäen samalla abstraktin kuvauksen eli olevan isomorfisesti kahdella tasolla. Piaget`n kuvaus varhaisimmista ajattelun vaiheista oli lähinnä biologinen prosessi ja myöhemmistä vaiheista ennen kaikkea loogisiin operaatioihin perustuva abstraktio. Näiden vaiheiden sijoittuminen ajatteluun ja mainittu isomorfismi on edelleen tuntematon. (Meadows 1993, 206; Meadows 2006.)

Rauste-Von Wright ym. (2003, 76) mukaan Piaget'n teorian keskeisin heikkous on se, ettei se huomioi ajattelun ja oppimisen kontekstisidonnaisuutta. Kun ajattelua tutkitaan tehtävillä, jotka liittyvät hänen kokemusmaailmaansa ja joita lapsi harrastaa, on vaikea löytää yleisiä kehitysvaiheita. Samalla yhä abstraktimpi ajattelu käy mahdolliseksi. (Rauste-Von Wright ym. 2003, 75–76.)

Piaget'n teoria assimilaatiosta ja akkommodaatiosta on hallinnut oppimispsykologista keskustelua näihin päiviin asti. Sitä on tietenkin kehitetty ja yksi tärkeimmistä piaget'laiseen traditioon perustuva tutkimussuuntaus on viimeaikainen radikaalikonstruktivismi

Simon et al. (2004) luettelevat radikaalin konstruktivismin tietämisen ja oppimisen kolme perusperiaatetta:

1. Matematiikka syntyy ihmisen aktiivisuudesta. Ihmisellä ei ole pääsyä matematiikkaan, joka on riippumaton hänen tietämyksestään.

2. Mitä ihmiset kullakin hetkellä tietävät (ts. heidän kulloisetkin käsityksensä) sallii ja sisältää sen, mitä he voivat assimiloida, omaksua tai ymmärtää.
3. Matematiikan oppiminen on prosessi, jossa yksilön tapa tietää (käsitykset) ja toimia muuttuvat.

(Simon et al. 2004, 306.)

Simon et al. käyttävät termiä käsitys (conception), mutta he sanovat sen viittaavan kognitiiviseen olioon (entity), jota myös konstruktivistisessa kirjallisuudessa kutsutaan skeemaksi (scheme), käsitteellisiksi rakenteiksi ja operaatioiksi (conceptual structures and operations) sekä henkisiksi objekteiksi (mental objects). He myös muistuttavat, että Piaget ei keskittynyt matematiikan opetuksen tutkimukseen, mutta hänen työnsä voi hyödyttää sitä.

Seuraavaksi he pohtivat oppimisen 'paradoksia', jossa 'avainkysymys' on: "Kuinka oppijat voivat rakentaa itselleen matemaattiset käsitteet, jotka ovat sillä hetkellä heidän taitojensa tavoittamattomissa?" He myös käyttävät termiä 'reflektiivinen abstraktio', jolla selitetään käsitteenmuodostumista, ja jota käytetään termin 'ekvilibraatio' tilalla. Reflektiivinen abstraktio on siis prosessi, joka mahdollistaa korkeamman henkisen tason synnyn. (Piaget 2001; Simon et al. 2004.)

Bereiter (1985, 201) on pohtinut oppimisen paradoksia, ja todennut: "the paradox is that if one tries to account for learning by means of mental actions carried out by the learner, then it is necessary to attribute to the learner a prior cognitive structure that is advanced or complex as the one to be acquired." Siis paradoksi on siinä, että oppiessaan uutta käyttäen apuna vain omia henkisiä toimintojaan oppijalla olisi oltava jo valmiina kehittyneempiä tai monimutkaisempia henkisiä toimintoja kuin se, mitä opitaan.

3.2 Oppimisen yhteisöllisyys

Oppiminen voidaan nähdä yksilölliseksi prosessiksi, kuten Piaget teki, tai yhteisölliseksi tapahtumaksi, jolloin oppimiseen vaikuttavat ratkaisevasti kaikki oppimistilanteessa mukana olevat. Venäläisen Lev S. Vygotskyn 1920- ja 1930-lukujen Neuvostoliitossa kehittämän näkemyksen mukaan oppiminen ei ole yksilöllistä ja sisäistä, vaan pikemminkin kognitiiviset kyvyt ja kapasiteetti rakentuvat ja muotoutuvat sosiaalisena ilmiönä. Ne luodaan sosiaalisen yhteisön vuorovaikutuksessa. Mikä tahansa kuvaus kognitiosta irrotettuna sosiaalisesta yhteydestään antaa siitä väärän ja harhaanjohtavan kuvan. (Meadows 1993, 236.)

Vygotskyn teoriasta voidaan lainata seuraavia keskeisiä kohtia:

> "We call the interial reconstruction of an external operation *internalization*. … the process of internalization concist of series of transformations: a) *An operation that initially represents an external activity is reconstructed and begins to occur internally*. … b) *An interpersonal process is transformed into an intrapersonal one*. Every function in the child's cultural development appears twice: first, on the social level, and later, on the individual level; first, *between* people (*interpsychological*), and then *inside* the child (*intrapsychological*). … c) *The transformation of an interpersonal process into an intrapersonal one is the result of a long series of developmental events*.

> The process being transformed continues to exist and to change as an external form of activity for a long time before definitively turning inward."
>
> (Vygotsky1978, 56–57, kursivointi Vygotskyn)

Siis sisäiset ajattelun rakenteet ovat seurausta ulkoisista aktiviteeteista ja kokemuksista. Radfordin (2011) mukaan Vygotsky ei ajattele, että ajattelu tapahtuisi vain 'päässä' vaan se koostuu materiaalisista ja henkisistä komponenteista. Se muodostuu "(sisäisestä ja ulkoisesta) puheesta, mielikuvituksen kohteista, liikkeestä, tuntoaistista ja todellisista toimista kulttuuristen artifaktien kanssa." (Radford 2011, 17.)

Sosiaalisen maailman tärkeys kognitiivisessa kehityksessä on hyvin erilainen Piaget`lla ja Vygotskyllä. Piaget kiinnittää itse asiassa hyvin vähän huomiota sosiaaliseen interaktioon, oikeastaan vain tapauksessa jossa ympäristön aiheuttama epäjärjestys johtaa yksilön sisäiseen disekvilibraatioon ja sitä kautta reflektioon ja kognitiiviseen edistymiseen. Vygotsky puolestaan ajattelee, että kognitiivinen kehitys aiheutuu sisäistyksestä, transformaatiosta ja rutiinien käytöstä sekä ideoista ja taidoista, jotka on opittu *sosiaalisesti*, pätevämmiltä henkilöiltä, vaikkakin yksilöllisellä kognitiivisella lähestymistavalla. (Meadows 1993, 237–238.)

Vygotskyn teoria kognitiivisesta kehityksestä keskittyy hyvin suurelta osin *kielen* merkitykseen. Hän näki kielen yhtenä tärkeimmistä "psykologisista työkaluista". (Vygotski1982; Meadows 1993, 244.) Vygotsky ei näe tarvetta yksilöllisen reflektion käsitteelle, vaan monella tapaa sosiaalinen systeemi itsessään saa aikaan kumulatiivisen ajattelun tai tiedon lisäyksen. Tässä kieli toimii kokemuksen organisoijana. (Glassman 2001, 9.) Vygotsky myös erottaa jokapäiväisen kulttuuriin ja historiaan sidotun kielen enemmän organisoidusta oppimiseen liittyvistä tieteellisistä käsitteistä. Vygotskylle tämä käsite "Scientific Concepts as Secondary Experience" on Glassmannin (2001, 9) mukaan kompleksinen ja monimerkityksinen ilmiö. Nämä tieteelliset käsitteet ovat enemmän koulutuksen päämäärä kuin osa luonnollista ajatteluprosessia (Glassman 2001, 9).

Myös Piaget tiedostaa kielen merkityksen intellektuaalisessa kehityksessä. Becker & Varelas`n (2001, 22) mukaan Piaget sitoi sosiaalisen interaktion tärkeyden tässä kehityksessä nimenomaan kielen tärkeyteen. Bills (2002) argumentoi, että lapset omaksuessaan luokan yleisen puhetyylin käyttävät sitä enemmän silloin, kun he selviytyvät laskuissaan hyvin. Oppilaat omaksuivat opettajan puhetyylin ja käyttivät sitä selittäessään, miten he tehtävän suorittivat, ja tämä oli todennäköisempää silloin, kun he antoivat tehtävään oikean vastauksen. (Bills 2002.)

3.3 Lähikehitysvyöhyke ja ulkoisen materiaalin tärkeys

Vygotskyn perintöä neuvostopsykologiassa jatkoivat hänen oppilaansa ja työtoverinsa, kuten Pjotr Galperin, A. N. Leontjev ja V. V. Davydov. Heistä etenkin Pjotr Galperin otti lähtökohdakseen Vygotskyn käsitteen sisäistäminen (internalization) ja kehitti sitä käytännöllisempään opetus-oppimisteorian suuntaan. (Haenen 2001, Koskinen 2005.) Sisäistämisen ohella Vygotsky oli kehittänyt sen käyttöön toisen tärkeän käsitteen, ns. lähikehityksen vyöhykkeen, "zone of proximal development" eli ZPD:n (Haenen 2001, 159).

Ensinnäkin Vygotsky (1978) määritteli lapsen todellisen kehityksen vyöhykkeen (actual development level) siksi tasoksi, jolla lapsi hallitsee hänelle esitetyt tehtävät yksin ilman muiden apua. Esimerkiksi koetilanteet ja testit mittaavat juuri tätä tasoa. Mutta tarkastellaan tilannetta, jossa lasta autetaan ongelmassa, jota hän ei vielä osaa ratkaista. Tämä apu voi olla esimerkiksi opettajan demostraatio taululla tai ongelman pilkkominen pienempiin osiin tai vaikkapa opettajan tekemiä johdattelevia kysymyksiä. Se voi myös olla toisten oppilaiden apu ryhmässä työskenneltäessä. Nyt ilmenee suuria eroja siinä, miten samantasoisiksi arvioidut oppilaat selviävät tällaisissa tilanteissa.

Lähikehitysvyöhyke (the zone of proximal development) on välimatka jo hallitusta ongelmanratkaisutaidosta siihen potentiaaliseen ongelmanratkaisutaitoon, joka on mahdollista saavuttaa aikuisen ohjauksessa tai yhteistyössä muiden lahjakkaampien oppilaiden kanssa (Vygotsky1978, 88). Kun todellinen kehityksen vyöhyke kertoo siitä, mitä on jo opittu, lähikehitysvyöhyke määrittää tulevaa kehitystä. Siksi se on tärkeä työväline kouluttajille ja psykologeille, ja siksi lapsen kehitystason voi määritellä vain kun otetaan huomioon todellinen kehitystaso ja lähikehitysvyöhyke. (Vygotsky 1978, 87.)

Opetuksessa on otettava huomioon lapsen sekä kypsyneet että kypsymässä olevat funktiot ja toisaalta on huomioitava lapsen lähikehityksessä mahdollinen yhteistyössä saavutettava kehitystaso. Lasta voi siis auttaa ratkaisemaan esim. johdattelevilla kysymyksillä tai tehtävässä alkuun auttamalla seuraavan ikätason tehtäviä ja näin hänen kehityksensä etenee.

Galperin kävi selvittämään tämän kehityksen opetuksellisia lähtökohtia. Hänen ja hänen kollegoidensa tutkimuksissa selviteltiin esikoululaisten ja ensimmäisen luokan oppilaiden (7–8 vuotiaiden) yksinkertaisia aritmeettisia päässälaskuja. Tutkittiin osasiko lapsi ”laskea tehtävän päässä” tai esineiden avulla, mikä oli yleistämisen aste jne. (Galperin 1957). Yhteenvetona tutkijat totesivat, että toiminta voi oppimisen aikana vaihdella simultaanisesti neljällä melko itsenäisellä tavalla:

1) Yleistäminen (generalization). Toiminta voi esiintyä enemmän tai vähemmän yleistettynä. Esim. toinen lapsi osasi helposti laskea yhteenlaskuja luvuilla 1–10, mutta ei suuremmilla, kun taas toiselle lapselle mikä tahansa lukualue oli helppo.
2) Täydellisyyden aste (completeness/ abbreviation). Esim. lapsi voi laskea yhteenlaskun perusteellisimmalla tavalla niin, että laskee ensin molemmat yhteenlaskettavat ja sitten aloittaa summan laskemisen alusta yksi palikka kerrallaan. Toinen lapsi aloittaa suoraan laskemisen toisesta yhteenlaskettavasta.
3) Hallinnan aste (mastery/familiatary). Esimerkiksi oppilas voi laskea opettajan opettamalla tavalla tunnilla, mutta yksin työskennellessään voi käyttää jotakin muuta metodia, koska ei hallitse opetettua täysin. Samaan tapaan heikommat oppilaat voivat laskea yksinkertaisia tehtäviä nopeasti laskemalla yksittäiset objektit, mutta kun mennään vaativampiin tehtäviin, tästä tavasta tulee oppimisen este.
4) Sisäistämisen tasot (assimilation/level of mastery). Oppilas voi suorittaa toiminnon eri tasoilla, esim. esineiden avulla, puhuen ääneen, mutta ilman

> esineitä tai vaikkapa 'puhuen ääneen itselleen' 'omassa päässään' eli käyttäen sisäistä puhetta. Tämä kaikki kuvastaa hänen itsenäisyyttään suhteessa ulkopuoliseen apuun. Tästä tuleekin Galperinin mukaan käyttöön uusi parametri: sisäistymisen eri asteet.
>
> (Galperin 1957, 215–216.)

Edellä olevat yleistäminen, täydellisyyden aste, hallinnan aste ja sisäistämisen taso ovat Galperinin (1957) mukaan melko toisistaan riippumattomia muuttujia (ks. myös Galperin & Talyzina 1961). Sen sijaan muodostaakseen tehokkaan henkisen toiminnon yksilön on käytävä nämä tasot perusteellisesti läpi. Kuitenkin juuri eri tasojen vaihtelu johtaa kehitykseen ulkoisista objekteista 'päässä tapahtuvaan' henkiseen toimintoon. Tässä toiminnossa Galperin näkee sarjan eri vaiheita ja niitä ovat seuraavat:

1) Luodaan orientoiva käsitys tehtävästä.
2) Harjoitellaan toiminta käyttäen ulkoista materiaalia.
3) Harjoitetaan toimintoa puhutun kielen avulla
4) Siirretään toiminto henkiselle tasolle
5) Lyhennetään henkistä toimintoa

(Galperin 1957, 117.)

Orientaatiovaihe on Galperinin mukaan koko prosessin tärkein vaihe. Opetuksen sisältöjen on oltava oppilaan kannalta mielekkäitä aivan alusta alkaen. (Haenen 2001, 161; ks. myös Koskinen 2005.) Galperin laajentaa Vygotskyn ns. lähikehitysvyöhykkeen ZPD:n nimenomaan aloittamalla opetus-oppimisprosessin perusteellisella orientaatiovaiheella. Hän puhuu käsitteestä 'orienting basis of an action' (OBA), jolla hän tarkoittaa kaikkia niitä elementtejä, joiden avulla opiskelijalle esitetään opittava uusi toiminto. Sen hän myös laajentaa käsitteeksi 'Scheme of a Complete Orienting Basis of an Action (SCOBA)'. Hänen mukaansa OBA on jotakin, mitä opiskelijalla itsellään on käytössä, mutta SCOBA taas on laajempi ulkoinen esitys, eräänlainen 'kognitiivinen kartta', joka on omaksuttu. Kun OBA lyhenee opiskelijan saavuttaessa täydellisemmän sisäistymisen tason, niin SCOBA säilyy pysyvänä mallina opiskeluprosessille ja siten varmistaa oppimisen. (Haenen 2001, 162).

Kun toiminto on ulkoisen materiaalin avulla onnistuneesti opittu, seuraa tätä vaihetta sosiaalisen puheen vaihe. Se mikä ensin materialisoitiin esineillä, tulee hallittavaksi puheen tasolla. Opiskelija ei kuitenkaan hallitse sitä vielä sisäisen puheen tasolla ts. puhuen 'päässään'. Kuitenkin ulkoinen materiaali ei enää ole niin tärkeää vaan nyt se korvataan sanoilla. Se merkitsee myös yleistyksen asteen lisääntymistä samoin kuin sitä, että sosiaalinen kommunikaatio on tärkeää tässä vaiheessa. Opiskelijan pitää pystyä selittämään oppimaansa, ei vain itselle vaan myös muille. (Haenen 2001). Tärkeitä työmuotoja tässä vaiheessa ovat esimerkiksi ryhmäkeskustelut sekä opettajan ja oppilaan väliset keskustelut.

Seuraavassa vaiheessa opiskelijaa rohkaistaan puhumaan mielessään, ts. käyttäen ns. sisäistä puhetta. Galperinin mukaan sellainen ¨kielellinen mielikuva" (audible image) voi seurata vain puhuttua vaihetta ja se on tehokkaampi mielikuva kuin vain käsitteellinen mielikuva (a perceptual image). (Haenen 2001, 164). Nyt toiminto on jo sisäistetty, vaikka sitä vielä edustaakin "sisäinen dialogi¨.

Toiminnan suorittaminen 'päässä' ilman konkreettisia ulkoisia materiaaleja tai edes ääneen puhuttua puhetta apuna käyttäen on Galperinin (1957) mukaan vaikeampaa, mutta alkaa silti lyhetä ja alkaa muistuttaa sitä lopullista ymmärryksen astetta, johon se johtaa. Nyt viimeisessä vaiheessa ulkoista materiaalia tarvitaan vain jos halutaan varmistaa jonkin toiminnan oikeellisuus. Toisaalta tämä henkinen toiminto sisältää myös mahdollisuuden uuden toiminnon orientoitumiseen. Tätä Galperin pitää aivan perustavana aspektina oppimisprosessissa. (Galperin 1957, Haenen 2001).

Galperinin teoriassa on mielenkiintoisinta hänen vaatimuksensa kunnollisesta ja perusteellisesta orientaatiovaiheesta. Aivan liian usein tämä sivuutetaan koulussa liian vähällä huomiolla. Nythän koko opetus-oppimisprosessi lähtee Galperinin mukaan liikkeelle tästä orientaatiovaiheesta, jota pitäisi seurata *konkreettisen ulkoisen materiaalin* käyttö. Sen pois jättäminen johtaa koko oppimisprosessin vaarantumiseen. Mielestäni vaatimus SCOBAsta olisi erinomainen lähtökohta alkuopetuksen yhteen- ja vähennyslaskujen opettamisessa. Kunnollinen fyysinen malli, palikkajonot, konkreettiset lukusuoramallit, kymmenjärjestelmävälineet jne. ovat tässä tarpeen. Kokemukseni mukaan suomalaisissa luokkahuoneissa olisi tässä suhteessa paljon parantamisen varaa.

3.4 Lähikehitysvyöhyke ja luokan oppimisvyöhyke

Vygotskyn lähikehityksen vyöhykkeen ZPD pohjalta Tharp ja Gallimore (1988) kehittivät oppimisen mallinsa, jossa he katsoivat, että oppimisen voidaan katsoa toteutuneen, kun tukea tarjotaan siinä ZPD:n pisteessä, missä apua tarvitaan. Tässä avustamisessa on opettajan arvio lapsen kyvyistä suhteessa ZPD:hen ja hänen kehitystasoonsa oleellinen vaatimus. (Tharp & Gallimore 1988, 41–42.)

Hakkaraisen (2010) mukaan Vygotskyn tavoite kehittää lähikehitysvyöhykkeestä pedagoginen työväline jäi kesken. Hänen mukaansa on jo sinänsä merkittävää, jos opettajan työn kohteeksi määritellään lähikehityksen vyöhyke ja kehitykseen johtava oppiminen. Perinteisestihän on ajateltu, että oppilaan saavuttama kehitystaso rajaa opettamisen ja oppimisen mahdollisuudet. (Hakkarainen 2010, 242.) Yhtenä lähikehitysvyöhykkeen sovelluksena hän mainitsee leikkipedagogiikan, josta jo Vygotsky mainitsi väittämän: 'leikki luo aina lähikehitysvyöhykkeen'. (Hakkarainen 2010, 244–246.)

Tharpin ja Gallimoren työn pohjalta puolestaan Murata ja Fuson (2006) loivat oman tarkennetun mallinsa lähikehityksen vyöhykkeestä. Se on esitetty kuviossa 2. Nyt he laajensivat mallia koskemaan 'Matemaattista osaamista'. Heidän 'ZPD Mathematical Profiency Model' edellyttää kahdenlaista oppimisen aktiivisuutta, nimittäin:

- opetuksellisia keskusteluja, jotka auttavat ymmärryksen kehittymistä
- harjoitusta, joka kehittää suorituksen sujuvuutta.

(Murata & Fuson 2006, 421.)

Mallin ensimmäisessä vaiheessa opettaja käy keskusteluja oppilaan kanssa tukien tätä hänen ongelmanratkaisussaan. Tällöin huomioidaan visuaaliset, sensomotoriset ja kielelliset ongelmanratkaisun tuet ja käydään läpi oppilaan laskumenetelmiä. Keskustellaan matemaattisista käsitteistä, kuten lukujen paikkajärjestelmästä. Kun oppilas on esitellyt menetelmiään, voidaan hänen menetelmiään käyttää uusiin ongelmiin. Samalla oppilaalle voidaan esitellä matemaattisesti haluttuja metodeja ja eri metodeja voidaan vertailla. Ensimmäiseen vaiheeseen kuuluu myös kyvykkäämpien oppilaiden tuki.

Verrattuna Tharpin ja Gallimoren työhön Murata ja Fuson (2006) siirtävät oppilaan sisäistämisen tason (internalization) vaiheesta 3 vaiheeseen 2, johon myös sijoittuu oppilaan oma puhe itselle joko ulkoisesti tai sisäisesti. He lisäsivät vaiheeseen kolme automatisoitumisen (abbrevition), koska se on tärkeä osa rakennettaessa matemaattista sujuvuutta. Mallin vaiheessa neljä taas varmistetaan, että opittu asia on hallinnassa myöhemminkin ja monimutkaisemmissa tehtävissä.

Murata ja Fuson perustavat mallinsa tapaustutkimukseen. Japanilaisessa koulussa 1. luokalla erilaisilla avustuskeinoilla voitiin tukea oppilaiden omaa opiskelua. Samalla tutkittiin kuinka yksilölliset omat oppimispolut yhdistyvät luokan oppimisympäristöksi (the Classroom Learning Zone) ja kuinka ne vaikuttavat toisiinsa (Murata & Fuson 2006, 423).

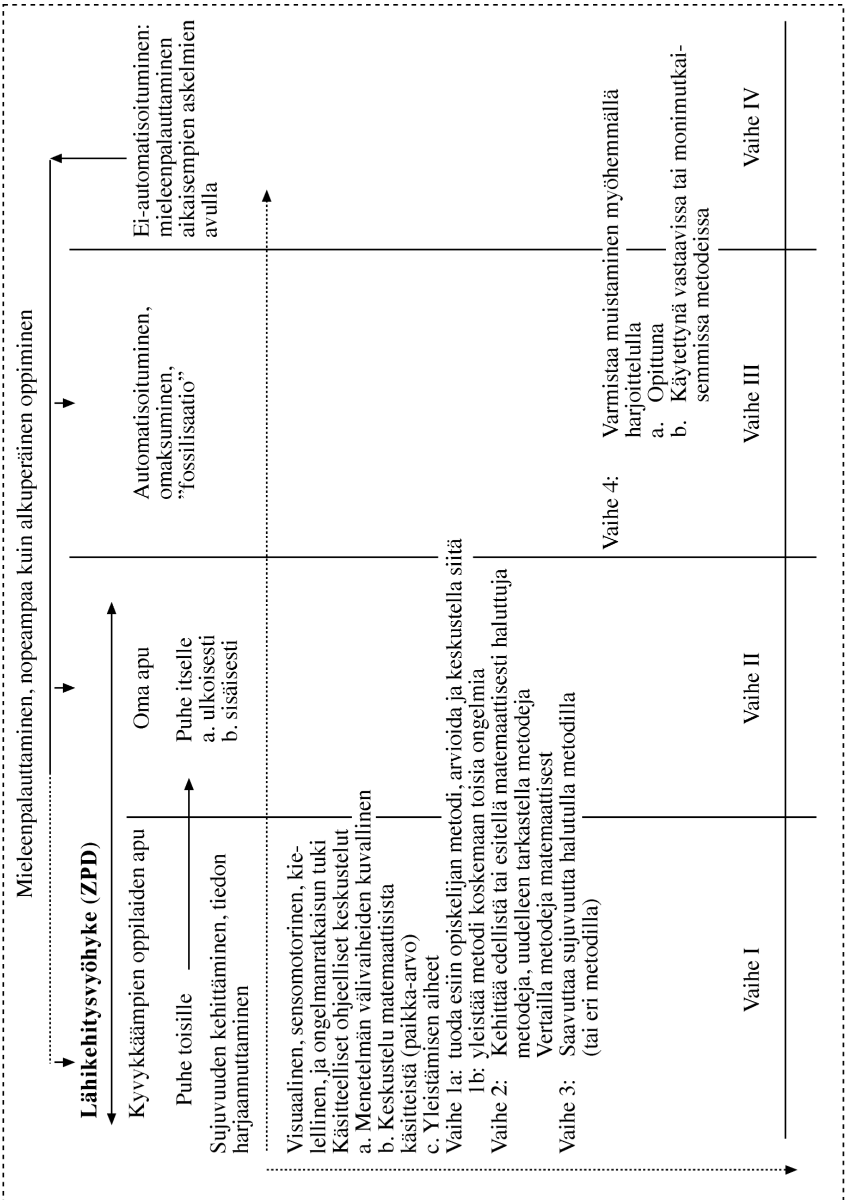
He myös määrittelivät käsitteen 'luokan oppimispolku' (a Class Learning Path). Heidän määrittelynsä mukaan se koostuu pienestä määrästä erilaisia 'oppilaiden oppimispolkuja'. Tällöin se antaa mahdollisuuden opettajalle avustaa oppilaita juuri heidän oman tasonsa mukaisesti.

Murata ja Fuson (2006) lisäävät, että kun Tharpin ja Gallimoren määritelmässä oppimisesta puhutaan kyvykkäämpien antamasta avusta siinä tilanteessa, kun apua tarvitaan, niin tämä avustaja voi olla myös edistyneempi oppilas.

Puhuttaessa luokan oppimispoluista on myös huomattava, että niitä on rajallinen määrä. Vaikka luokassa olisi 20 tai vaikkapa 35 oppilasta ja yksi opettaja, ei oppimispolkuja ole näin montaa. Sen sijaan tavallisesti on kolmesta kuuteen oppimispolkua pienin poikkeuksin. Opettaja voi avustaa oppilaita näiden oppimispoluilla. Oppimispolut voidaan myös esitellä opetussuunnitelmassa. Opettajat voidaan myös varustaa tarpeellisilla välineillä niiden opettamiseksi. Myös visuaalisia apuvälineitä voidaan kehittää tiettyjen aihealueiden avuksi. (Murata & Fuson 2006, 424.)

Luokan oppimisympäristö on päivästä toiseen tapahtuvaa opiskelua, jossa opettaja järjestää kullekin oppilaalle hänelle kuuluvan avun. Poikkeavat oppilaat (joko erityisen lahjakkaat tai erityisen hitaasti oppivat) voivat pudota luokan oppimisympäristön ulkopuolelle. Erityisen lahjakkaat voivat avustaa toisia oppilaita vaikka voivatkin siinä avustamisessa tarvita apua. Avustamisessa hyödynnetään visuaalisia, senso-motorisia, kielellisiä tai vaikkapa ongelmanratkaisuun perustuvaa tukea (vrt. Radford 2011). Luokan oppimispolut ovat tämän päivästä toiseen jatkuvan opiskelun tuloksia ts. niitä oppimispolkuja, joita suurin osa luokasta käyttää. Muutamat oppilaat eivät ehkä täysin ymmärrä haettua metodia, mutta heitä autetaan sopivalla lisäopetuksella saavuttamaan haluttu osaaminen. Lisäksi oppilaat voivat siirtyä käyttämään tehokkaampaa ja yleisempää menetelmää valintansa mukaan. Oppiminen lisää kaikkien oppilaiden ymmärrystä siitä, miten muut oppilaat ratkaisevat ongelmia, ja se lisää heidän kykyään auttaa muita oppilaita. (Murata & Fuson 2006, 426.)

Malli on mielestäni hyvä siinä suhteessa, että se huomioi sosiaalisen oppimisen mahdollisuuden omilta edistyneemmiltä luokkatovereilta, ei vain opettajalta tai joltain muulta aikuiselta. Samoin mallissa kuvataan hyvin sitä, että aikaa myöten jo automatisoitu oppiminen voi muuttua uudestaan ei-automaatioksi, jolloin tarvitaan kertaavaa oppimista. Se taas on luonteeltaan nopeampaa kuin tavallinen oppiminen.



Kuvio 2. Muratan ja Fusonin ZPD mathematical profiency- malli (Murata & Fuson 2006, 425)

4 Lukukäsite ja laskemisen strategiat

Tässä luvussa perehdytään ensin lukukäsitteen kehittymiseen Piaget'n (1952), Fusonin (1992) sekä Carpenterin ja Moserin (1982) tutkimuksiin perustuen. Muitakin tutkimuksia käydään läpi. Sen jälkeen esitetään joitakin tutkimuksia yhteen- ja vähennyslaskustrategioista sekä niiden kehittymisestä.

4.1 Lukukäsitteen rakentuminen Piaget'n mukaan

Piaget 'n (1952) lähtökohta on, että lukukäsitteen kehittyminen on läheisessä yhteydessä loogisuuden kehittymiseen. Hänen mukaansa esinumerollinen kausi korreloi esiloogisen kauden kanssa. Lukukäsite syntyy vaihe vaiheelta hierarkkisesti loogisten luokkien ja sarjojen ja niihin liitettävien lukujonojen ja operaatioiden seurauksena.

Tämän tarkastelun hän aloittaa tarkastelemalla määrän säilyvyyttä tutkimalla lasten käsityksiä nestemäärän säilyvyydestä erimuotoisissa astioissa. Hän päätyy tuloksissaan kolmeen eri luokkaan: 1) säilyvyyden puute 2) vaihtelevat reaktiot säilyvyyteen ja 3) välttämätön säilyvyys. Viimeisessä luokassa oleva lapsi ymmärtää, että nesteen määrä ei riipu siitä, minkä muotoiseen astiaan se kaadetaan. Tämä vastausten jako kolmeen eri kategoriaan tai luokkaan seuraa sitten läpi tutkimuksen, kun Piaget etenee luokittelussa ja sarjoittelussa yhä monimutkaisempiin tehtäviin.

Toisessa vaiheessa Piaget tutkii erillisten kappaleiden, tässä tapauksessa puuhelmien, säilymistä erilaisilla tehtävillä. Myöhemmin hän etenee kahden eri ryhmän välisen yksi-yhteen vastaavuuden tutkimiseen esim. kukkien ja vaasien kohdalla. Sama jako kolmeen eri kategoriaan tuloksissa säilyy. Hän mm. toteaa ensimmäiseen ryhmään kuuluvista lapsista sen huomion, että ääneenlasku ei näytä suuremmin auttavan lukumäärien säilymisen ja yksi-yhteen vastaavuuden hallitsemisessa. Tähän ryhmään kuuluvilla lapsilla ei vielä ole selvillä lukujen kardinaalinen käsite. Nyt esim. helmijoukko joka on levitetty laajemmalle näyttää lapsesta samalla suuremmalta määrältä kuin sama määrä helmiä tiheämpään aseteltuna. Toisaalta toiseen kategoriaan kuuluvat lapset tuntuvat omaavan intuitiivisesti yksi yhteen vastaavuuden laadullisesti erilaisissakin ryhmissä. Tässä he tarvitsevat nimenomaan konkreettisia esineitä vastaavuuden toteamiseen.

Edelleen kolmannessa kategoriassa vastaavuus ei enää riipu yksittäisistä esineistä ja se on myös käänteinen. Se on seurausta joko esineiden laadullisesta luokittelusta tai niiden numeraalisesta luokittelusta. Piaget nimittääkin tätä vaihetta operationaaliseksi vastaavuudeksi. Tässä vaiheessa on siis tärkeää, että vastaavuus on täydellisen käänteinen riippumatta esim. esineiden sijoittelusta.

Seuraavassa tutkimusvaiheessa Piaget tutki sarjojen, erityisesti epäsymmetristen sarjojen ja niihin liittyvää ordinaalisuuden ja kardinaalisuuden käsitettä. Siinä hän esitti, että lapsi siirtyy laadullisesta vastaavuudesta ordinaaliseen vastaavuuteen. Myöhemmin hän päättelee, että ordinaalisuutta aina seuraa kardinaalisuus ja päinvastoin. Kaiken aikaa hän luokitteli lasten vastaukset edelleen kolmeen kategoriaan: 1) epäonnistunut vastaavuus (correspondence) 2) intuitiivinen vastaavuus ja 3) systemaattinen vastaavuus. Ensimmäisessä kategoriassa olevat lapset käyttävät nyt ensimmäistä kertaa lukuja kardinaalisesti, mutta vain niin, että he liittävät ne konkreettisiin esineisiin. Esim. he osaavat järjestää saman määrän nukkeja ja näille kuuluvia esineitä riviin niin, että kumpiakin on yhtä monta kun he itse tekevät sen. Toisessa vaiheessa tämä taito lisääntyy ja kolmannessa vaiheessa oleva lapsi osaa tehdä sarjoittelun siten että sitä ei enää hallitse intuitio vaan todellinen operationaalisuus.

Tämän jälkeen Piaget tutki, miten lapsi oppii yhteenlasku- ja kertolaskuoperaatiot. Hän ei kuitenkaan verrannut tutkimuksiaan kouluopetuksen yhteenlasku- ja kertolaskuihin, joita hän tuntui pitävän enemmän kielellisenä oppimisena. Hän oli kiinnostunut siitä, miten lapsi perimmältään oppii numeeriset operaatiot ja tule niistä tietoiseksi. Hänen mukaansa se, että edellä on keskitytty sarjoihin ja luokkiin sekä niiden epäsymmetriseen relaatioon, ei tarkoita, että nämä tulevat käsitteenä ennen lukukäsitettä. Päinvastoin lukukäsitteen voi katsoa olevan edellytys todellisille loogisille rakenteille. Sen sijaan, että lukukäsite syntyisi luokkien hahmottamisesta tai päinvastoin, voi katsoa niiden syntyvän käsi kädessä ja tukevan toistensa kehittymistä.

Jos siis luvun ja luokittelun käsitteiden katsotaan olevan erottamattomat, on selvää, että niillä on yhteinen tärkeä perusta, nimittäin yhteenlaskuoperaatiot. Niihin sisältyy kokonaisuuden ymmärtäminen ja kokonaisuuden jakaminen osiin (Piaget 1952, 161–162). Luvun ja luokan välinen ero on siinä, että luvussa osat ovat homogeenisia yksikköjä, kun taas luokassa osat ovat vai laadullisesti erilaisia luokkia. Siksi Piaget'n mukaan tutkimusongelma kuului, seuraako edellä mainitussa tutkimustulosten toisessa kategoriassa intuitiivisesti ymmärrettyjä luokkien osia todellinen lukukäsitteen hallinta ennen siirtymistä kolmanteen kategoriaan. Onko siis lukukäsite edellytys luokkien todelliseen ymmärtämiseen?

Tulosten ensimmäisessä kategoriassa on siis yhteenlaskun hallinnan puuttuminen. Siinä vaiheessa lapsi kykenee ymmärtämään joko kokonaisuuden tai sen osat nähdessään ne, mutta ei kykene simultaanisesti ymmärtämään niiden yhteyttä toisiinsa. Toisessa ja kolmannessa vaiheessa lapsi oppii intuitiivisesti ymmärtämään oikean vastauksen. Kolmannessa vaiheessa olevat lapset ovat saavuttaneet pisteen, jossa he ovat psykologisesti kykeneviä käänteisyyden sekä loogisen hahmottamisen ja suorien operaatioiden käyttöön. He siis hallitsevat luokittelun muodossa B=A+A' ja A=B-A' (Piaget 1952, 180).

Luokittelulla ja lukukäsitteellä on sama looginen mekanismi, niiden yhteenlasku- ja kertotaulu-operaatiot. Seuraavissa vaiheissa Piaget tutkikin sitä, miten kahdesta yhteenlaskettavasta koostuvaa uutta lukua vastaavaa prosessia voi verrata kahden luokan yhdistämiseen. Nyt tuloksissa lapset ensimmäisessä vaiheessa eivät ymmärrä, että kun kokonaisuus B jaetaan kahteen osaan A ja A', niin osat yhä muodostavat saman kokonaisuuden. Seuraavassa vaiheessa lapsen intuitiivinen ymmärrys ositteluun lisääntyy ja viimeisessä vaiheessa se on todellinen käänteisiin operaatioihin perustuva ymmärrys. Silloin lapsi ymmärtää sekä luvun osat että osien muodostaman kokonaisuuden. Silloin hän esimerkiksi ymmärtää, että luku kahdeksan voidaan esittää 4+4=1+7=2+6=3+5.

Edelleen ensimmäisessä vaiheessa oleva lapsi ei ymmärrä että yhteenlasku ja vähennyslasku kompensoivat toisiaan. Jos hän esimerkiksi lisää jotakin esineryhmää tietyllä lukumäärällä esineitä, jotka hän ottaa toisesta ryhmästä, hän ei ymmärrä, että jälkimmäinen ryhmä pienenee saman luvun verran kuin edellinen lisääntyi. Toisessa vaiheessa hänen tietoisuutensa tästä lisääntyy intuitiivisella tasolla, mutta edelleen hänen on vaikea arvioida ja verrata lukumäärien yhtäläisyyttä. Kolmannessa vaiheessa hän laskee siirrot etukäteen ja siksi myös ymmärtää niiden olevan täysin käänteisiä.

Edellä olevan kahden luokan vertailun Piaget laajensi lopuksi koskemaan useita eri luokkia verraten operoimista niillä samalla aritmeettiseen kertolaskuun. Molemmat perustuvat edelleen yksi-yhteen vastaavuuden avulla saavutettuun ekvivalenssin ymmärtämiseen, joka samalla sisältää kertolaskun omaisen luonteensa. Kuitenkin yhteenlasku- ja kertolasku perustuvat erilaiseen ekvivalenssin muotoon. Nyt erilaisten luokkien ekvivalenssit perustuvat laadulliseen vastaavuuteen ja ovat jo luonteeltaan kertotaulun omaisia. Tämän vastaavuuden siirtäminen aritmeettiseen kertolaskuun vaatii luokilta sen ominaisuuden, että niiden on oltava luonteeltaan 'yksittäisiä' aivan samoin kuin yhteenlaskunkin osalla oli. (Piaget 1952). Operoiminen moninkertaisilla luokilla ei ole ennen aikainen verrattuna operoimiseen kertolaskuilla, vaan ne saavutetaan yhtä aikaa.

Lopuksi Piaget yhteenvedon omaisesti korostaa, että sekä numeeristen operaatioiden että loogisten operaatioiden yhteys ja ymmärrys on implisiittisesti mukana jo aivan alussa pohditussa säilyvyyden käsitteessä. Ensimmäisessä vaiheessa lapsi ei ymmärrä kumpaakaan, ei säilyvyyttä eikä laskuoperaatioita. Seuraavassa vaiheessa intuition lisääntyessä lapsi ymmärtää suhteita ja vastaavuuksia kunhan luokat tai luvut eivät ole liian suuria. Kolmas vaihe tulee mahdolliseksi vasta kun lapsi saavuttaa sekä laadullisilla luokilla että luvuilla em. kertolaskuoperaatiot ja kun ne tulevat ehjiksi ja käänteisiksi. Piaget (1952, 243) toteaa, että luku on nähtävä luokkien ja epäsymmetristen relaatioiden synteesinä.

Piaget tutki työryhmineen säilyvyyden käsitettä neljän vuosikymmenen ajan. Lisäksi tutkimusta ovat jatkaneet sadat muut tutkijat eri puolilla maailmaa. Kaikki eivät tietenkään jaa Piaget'n käsityksiä sellaisenaan (Wadsworth 1984). Hänen työstään on myös vallalla lukuisia väärinkäsityksiä. Piaget ei esimerkiksi kehittänyt teoriaa koulutuksesta (education), eikä hänen teoriansa ole mikään resepti paremman opetuksen saavuttamiseen. Ensimmäinen askel siinä on toki yrittää ymmärtää Piaget'n teoriaa lapsen ymmärryksen ja älyllisen kehityksen kasvusta.

Piaget ei myöskään koskaan kiistänyt opettajan osuutta lapsen älyllisessä kehityksessä. Tähän johtopäätökseen ovat jotkut päätyneet, koska teorian mukaan lasten tietämys kehittyy heidän kokemuksistaan ympäristön kanssa. Mutta juuri tässä yhteydessä on opettajan rooli keskeinen piaget'laisessa luokkahuoneessa. (Wadsworth 1984.)

4.2 Lukukäsitteen kehittyminen Fusonin mukaan

Kaikissa kulttuureissa laskeminen on se tapa, jolla määritetään eroja lukumäärissä, jotka eivät ole niin pieniä, että ne ymmärretään ilman laskemistakin (Fuson 1992, 248). Kulttuuriin kuuluu sille ominainen lukusanojen joukko, joka liittää kunkin luvun laskettaviin esineisiin tai kohteisiin. Viimeiseksi lausuttu lukusana sitten muuttuu koko laskettavan kohdejoukon kardinaaliseksi lukumääräksi. Kehittäessään laskutaitoaan lapsen on jokaisessa kulttuurissa opittava ensin luettelemaan oman kielensä lukusanoja; opittava osoittamaan luetellessaan esineitä; osattava yhdistää osoittamansa esine ja sen yhteydessä luettelemansa lukusana; opittava muistamaan jo laskemansa esineet, ettei laske niitä uudestaan ja lopuksi ymmärtämään laskemansa luvun kardinaalinen merkitys. (Fuson 1992, 248).

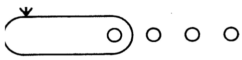
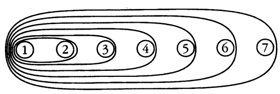
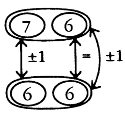
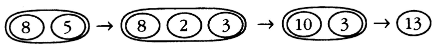
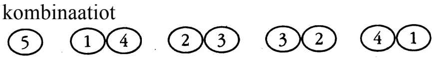
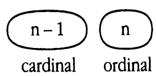
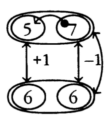
Lapsen lukukäsite siis kehittyy lukusanojen luettelemisen, esineiden laskemisen lukusanoja vastaavasti ja lukusanojen kardinaalisen käytön myötä. Tässä kehityksessä Fuson näkee sarjan kehitysvaiheita, joista ensimmäisen hän nimeää jono (string) -vaiheeksi. Tällöin lapsi vain luettelee oppimansa lukusanat yhteen menoon erottelematta niitä. Tätä seuraa jakamaton numeroiden lista -vaihe (unbreakable list) ja sen ensivaiheessa jono (sequence) jakautuu lapsen mielessä erillisiksi numerosanoiksi. Jono-laskemis-vaiheessa (sequence-counting) lukusanat yhdistyvät laskemisen kohteisiin. Seuraavaksi (sequance-count-cardinal) lapsi oppii, että viimeiseksi mainittu lukusana kertoo esineiden lukumäärän. Myöhemmin hänen on opittava sama toisinpäin: annetun kardinaalisen luvun mukaisesti hänen on osattava laskea oikea määrä esineitä ts. laskiessaan hänen on muistettava annettu luku.

Seuraavassa vaiheessa (Breakable chain) lapsi voi aloittaa laskemisen mistä tahansa luvusta. Tällöin hän osaa siirtyä luvun kardinaalisesta merkityksestä laskemiseen (cardinal-to-count transition). Nyt hän voi laskemisessa käyttää myös tehokkaampaa strategiaa aloittaen yhteenlaskemisen suoraan toisesta yhteenlaskettavasta (counting on method). Seuraavassa vaiheessa (numerable chain) laskeminen ei vaadi fyysisiä objekteja vaan pikemminkin lapsi laskee lukusanojen avulla (Fuson 1992, 248). Apuna hän käyttää kuulemista, kuvaa tai vaikkapa sormia. He myös oppivat ns. kaksinkertaisen laskemisen pystyäkseen laskuissa laskemaan toisen yhteenlaskettavan luettelemalla mielessään lukuja ja päätyen oikeaan vastaukseen.

Viimeisessä vaiheessa, jota Fuson nimittää ”Bidirectional Chain/ Truly Numerical Counting” jokainen lukusana on itsenäinen yksikkö, jolla on sekä oma paikkansa numerojonossa ja joka yhdistyy edelliseen/seuraavaan numerosanaan ordinaalisesti. Nyt kaksi erillistä yhteenlaskettavaa ovat samalla erillisiä lukuja ja toisaalta ne yhdistyvät summaansa. Yhteenlaskettavat/summa voidaan myös jakaa osiin. Tähän kuuluu myös ymmärrys siitä, että luku n ordinaalisesti saadaan laskemalla ensin n-1 objektia. (Fuson 1992.)

On selvää, että peruskoulun kahdella ensimmäisellä luokalla operoidaan lähinnä laskemisen tasoilla, joita kuvaavat Fusonin mallin kaksi viimeistä tasoa. Kinnunen, Lehtinen ja Vauras (1994) ovat tutkineet koulutulokkaiden matemaattisloogista ajattelua. Heidän mukaansa koulutulokkailla matemaattisloogiset osataidot (joukkojen vertailu, transitiivinen päättely ja lukumäärän säilyvyyden ymmärtäminen) ovat keskimäärin hallinnassa. Samoin ilmeni, että lukujonotaitojen hallinta on keskeisin ennustava tekijä arvioitaessa oppilaan myöhempää aritmetiikan hallintaa. Ensimmäisen kouluvuoden aikana tutkimukseen osallistuneiden lasten matemaattiset osataidot, erityisesti lukujonotaidot, kehittyivät voimakkaasti. Lapset myös suoriutuivat hyvin yhteenlaskun, vähennyslaskun ja ”aukkotehtävien” aritmeettisista operaatioista, jos ne sijoittuivat lukualueelle 0–20. Sen sijaan 20 ylittävällä lukualueella huomattavalla osalla oli vielä vaikeuksia. (Kinnunen, Lehtinen & Vauras 1994.)

Taulukko 1. Lukukäsitteen kehittymisen tasot Fusonin (1992, 249) mukaisesti.

Järjestyksen taso (sequence)	**Vastaava merkitys**	**Käsitteelliset rakenteet lukusanojen merkityksille ja suhteille**	
Jono	Ketju (sequence)	yksikaksikolmeneljäviisikuusiseitsemän	Sanat eivät ehkä ole erillisiä
Rikkoutumaton lista	Ketju (sequence)	yksi-kaksi-kolme-neljä-viisi-kuusi-seitsemän	Sanat ovat erillisiä
	Ketju-laskeminen (sequence-count)	yksi-kaksi-kolme-neljä-viisi-kuusi-seitsemän ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○	Sanat linkittyvät esineisiin
	Ketju-laske-minen-kar-dinaalinen (sequence-count-cardinal)	yksi-kaksi-kolme-neljä-viisi-kuusi-seitsemän —>[seitsemän]	Laskettavilla esineillä on kardinaalinen merkitys
Rikkoutuva lista	Ketju-laske-minen Kardinaalinen	[neljä] → neljä-viisi-kuusi-seitsemän → [seitsemän] 	Yhteenlaskettavat ovat osana summaa. Ensimmäinen yhteenlaskettava löytyy lukusanojen kardinaalisesta merkityksestä (cardinal-to-count transition)
Numeerinen lista	Ketju-laskeminen	Neljä viisi kuusi seitsemän - kardinaalinen	Ketjun sanat tulevat kardinaalisiksi yksiköiksi. Löydetään tapa esittää toinen yhteenlaskettava uudella tavalla
Kaksisuuntainen ketju/ Todellinen numeerinen laskeminen	Ketju-laskeminen - kardinaalinen	  7+6=12+1=13, Koska 6+6=12  Ymmärretään kunkin luvun kaikki mahdolliset kombinaatiot 	Lukujono ilmenee erillisinä sisäistettyinä lukujen jonona: Yhteenlaskettavat ymmärretään omina itsenään sekä ekvivalenssisuhteessa summaan. Yhteenlaskettavat ja summa ovat ositeltavissa.   5+7=12 koska 6+6=12

Viimeinen Fusonin esittämä taso, jossa yhteenlaskettavat ja niiden summa osataan tehokkaasti jakaa osiin, olisi taas erinomainen päämäärä, johon alkuopetuksen matematiikkakin tähtää.

Edellä taulukossa 1 on vielä yhteenveto esitetyistä lukukäsitteen kehittymisen vaiheista.

4.3 Yhteen- ja vähennyslaskun rakenteet

Yhteen- ja vähennyslaskun kehityksessä voidaan erottaa Carpenterin ja Moserin sekä Fusonin tutkimuksiin perustuen kolme eri tasoa (Carpenter & Moser 1982; Fuson 1992).

Ensimmäinen taso:

Ensimmäisellä tasolla lapset ymmärtävät yhteen- ja vähennyslaskun käyttäen apuna esineitä, jotka edustavat heille ymmärrettäviä lukumääriä. Esinejoukko on mallina yhteen- tai vähennyslaskulle, ja annetulla hetkellä esinejoukko voi kuvata vain yhteenlaskettavaa tai summaa, vaikka sen rooli voi vaihtua myöhemmin. Esineet voivat siksi kuvata ensin yhteenlaskettavaa ja esittää myöhemmin osaa summasta. (Fuson 1992, 250.) Kaikissa tapauksissa lapset mallintavat yhteen- tai vähennyslaskun esineiden avulla. He eivät näytä käyvän läpi normaaleja ongelmanratkaisun proseduureja, esim. eivät tietoisesti päätä, pitääkö käyttää yhteen- vai vähennyslaskua, vaan he konstruoivat tilanteen, numerot ja ratkaisun suoraan esineistä mallia ottaen. (Fuson 1992, 251.)

Toinen taso:

Yhteen- ja vähennyslaskun käsitteen rakenteen toisella tasolla kaikki laskutapahtuman kolme eri lukua voidaan esittää simultaanisesti yhdellä lukujonolla. Nyt siis esim. yhteenlaskettavat voivat esiintyä heti ymmärrettävinä lukuina, jotka yhdessä esittävät puolestaan summaa. Lapset voivat esittää ratkaisumalleja, joissa summan laskeminen voi alkaa tai vaikkapa päättyä ensimmäisen yhteenlaskettavan laskemiseen. Tällä tasolla lukusanoja ei myöskään enää käytetä lukua kuvaavan esinejoukon laskemiseen, vaan lukusanat itsessään edustavat yhteen- ja vähennyslaskun lukuja. Kaikissa näissä laskutapauksissa toisen yhteenlaskettavan luvun laskemiseen tarvitaan jokin toissijainen laskumenetelmä (double counting). (Fuson 1992.)

Laskeminen voi siis alkaa ensimmäisestä lukusanasta. Toinen yhteenlaskettava liitetään siihen luettelemalla lukusanoja eteenpäin samalla laskien jollakin tavalla, kuinka monta sanaa on sanottu toista yhteenlaskettavaa kohti. Esimerkiksi laskussa 5+4 lapsi voi luetella luvut ”1,2,3,4,5,6,7,8,9” pitäen pienen tauon mielessään luvun 5 kohdalla ja sen jälkeen laskien mielessään 4 lukua eteenpäin. Laskemisessa voidaan edetä ylöspäin tai vähennyslaskun ollessa kyseessä alaspäin. Nämä taaksepäin laskemisen proseduurit eroavat ensimmäisen tason vähennyslaskuihin liittyvistä laskemisista, sillä ensimmäisellä tasolla kaikki laskeminen tapahtui eteenpäin. Taaksepäin laskemisen proseduuri on päinvastainen eteenpäin laskemiselle, ja se on huomattavan paljon vaikeampaa. (Fuson 1992.)

Toisen tason laskustrategioissa lapset siirtyvät jossakin vaiheessa kaikkien esineiden laskemisesta suoraan toisen yhteenlaskettavan laskemiseen (counting all ja object-counting-on). Sitä miten ja milloin tämä siirto tapahtuu, ei varmasti tiedetä. Samalla tähän vaiheeseen liittyy paljon tutkittu vaihdannaisuuden periaate. Laskeminen on tehokkaampaa, jos sen aloittaa isommasta yhteenlaskettavasta. Kuitenkaan tämä vaihdannaisuuden periaate ei useinkaan ole lapsille tuttu. (Fuson 1992.)

Kolmas taso:

Laskemisen kolmannella tasolla perustuu lukuihin liitettäviin tunnettuihin tosiasioihin. Tällöin laskussa esiintyvät luvut ovat niin ymmärrettäviä, että niitä tai niiden summaa ei tarvitse erityisesti laskemalla laskea, vaan se on todettavissa. Esim. laskussa 7+5 lapsi ei laske luettelemalla lukuja 7:stä eteenpäin, vaan hän pilkkoo 5:n osiin laskien 7+3+2=12. Tai lasku 8+6 on laskettavissa esim. 6+6+2 =14, koska 6+6=12 on erityisen tuttu. (Fuson 1992, 257.)

Tälläkin tasolla pätee se, että vähennyslaskuun liittyvät johdetut laskusäännöt ovat vaikeampia kuin yhteenlaskuun liitetyt. Fusonin (1992, 257) mukaan monet toisen luokan oppilaat eivät opi niitä.

Toisaalta lapset osaavat helposti hyvin pieniin lukuihin liittyvät tunnetut laskusäännöt jo ennen kuin tämä vaihe on yleisesti käytössä. Sellaiset tunnetut tosiasiat kuin 1+1=2 ja 2+2=4 ovat jo silloinkin lasten käytössä, kun muut proseduurit eivät ole vielä kehittyneet. (Ks. myös Fuson 1984.) Kun puhutaan toisen luokan oppilaista, on huomattava, että Fuson kuten useimmat muutkin tutkijat tarkoittavat samanikäisiä lapsia kuin Suomen koululaitoksen toisen luokan oppilaat ovat, siis noin kahdeksanvuotiaita.

4.4 Moninumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskun kehittyminen

Siirryttäessä useampinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskuihin 2. ja etenkin 3. luokalla monilla oppilailla tulee vaikeuksia. Useat oppilaat esim. kääntävät kaksinumeroisen luvun ja lukevat sen oikealta vasemmalle. Fusonin (1992) mukaan monet vaikeudet aiheutuvat siitä, että lapset ymmärtävät ja käsittävät luvut pikemminkin yksittäisinä yksinumeroisina lukuina, jotka on sijoitettu vierekkäin, eivätkä ymmärrä lukujen todellista moninumeroista luonnetta. Niinpä he voivat esim. laskea laskun 37+8 vastaukseksi 315 tai 117 kun lasku on esitetty vain kirjoitettuina numeroina. Saman laskun he voivat toisaalta laskea oikein, jos se esitetään heille esim. palikoilla, jolloin he laskevat 8 eteenpäin 37:stä ja saavat vastaukseksi 45. (Fuson 1992, 263).

Seuraavassa esittelen kaksinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskun rakenteita lähinnä Fusonin teoriaan perustuen. Hän on yhdessä muiden tutkijoiden kanssa julkaissut kootusti teorian lasten konseptuaalisista rakenteista moninumeroisissa yhteen- ja vähennyslaskuissa (Fuson et al. 1997) ja siitä poimin seuraavassa muutaman periaatteen. He ymmärtävät moninumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskun opettamisen enemmänkin lähtökohtaisesti ongelmanratkaisuna kuin vain sääntöjen ja menetelmien välittämisenä.

Opetuksessa oppilaalle annetaan runsaasti mahdollisuuksia kehittää omia proseduurejaan yhteen- ja vähennyslaskujen ja lukujen paikkajärjestelmän ymmärtämiseen sekä myös aikaa keskustella ja vertailla ratkaisujaan muiden oppilaiden kanssa. Sillä tavoin he voivat tutustua vaihtoehtoisiin strategioihin. Käytössä on kymmenjärjestelmävälineet tai Unifix-kuutiot tai vaikkapa Montessori-kortit, mutta tutkijat eivät oleta, että nämä välineet automaattisesti ja välittömästi saavat aikaan oppimisen ja käsitteiden sisäistämisen. Näiden käsitteiden rakentumista auttaa se, että edellä mainittu materiaali on oppilaan saatavilla ja käsitteet rakentuvat sitten luokan sisällä käytävässä sosiaalisessa kanssakäymisessä ja se myös vaati melko pitkän ajan. Kuitenkaan tutkijat eivät kiistä sitä, että joskus lapsi oppii jonkin asian yhtäkkisesti ymmärtäen, mutta siinäkin tapauksessa hänen ymmärryksensä rakenteet muovautuvat uudelleen. (Fuson et all. 1997; Hiebert & Wearne 1992.)

Fusonin (1992) mukaan lapset kaksinumeroisia yhteen- ja vähennyslaskuja laskiessaan voivat käyttää kaikkia aiemmassa luvussa esitettyjä strategioita, jolloin he siis voivat laskea luettelemalla lukuja alusta tai laskea eteenpäin suuremmasta yhteenlaskettavasta. He voivat myös ositella, laskea eteenpäin tai taaksepäin yli kymmentä suuremmilla luvuilla. Nämä strategiat ovat kuitenkin aikaa vieviä ja alttiita virheille. Siksi lasten on kehitettävä itselleen strategiat suurempien lukujen ymmärrykseen. Suuremmat luvuthan rakentuvat sekä numeroilla merkittyinä että puhuttuna kielenä aina pienemmistä yksiköistä. Tässä myös kielet eroavat toisistaan.

Varsinaisissa moninumeroisissa luvuissa numeromerkinnästä siirtyminen luvun puhuttuun muotoon on varsin monimutkainen tapahtuma. Esimerkiksi lapsi voi kirjoittaa luvun ”viisisataa kuusikymmentäkaksi” muotoon 500602 eikä 562, jonka hän mieltää luvuksi ”viisi kuusi kaksi” (Fuson 1992, 263). Osatakseen lukea oikein moninumeroisen luvun lapsen on ensin luettava se oikealta vasemmalle löytääkseen ensimmäiselle numerolle paikka-arvon mukaisen merkityksen ja sitten luettava koko luku vasemmalta oikealle. Myös puuttuvan lukuyksikön tilalle on osattava sijoittaa nolla. Materiaali, joka edustaa ykkösiä, kymppejä, satoja ja tuhansia auttaa lasta hahmottamaan moninumeroisten lukujen käsitettä sekä auttaa numeromerkinnän ja lukusanojen yhteyden löytämisessä (Fuson 1992, 264).

Moninumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskussa keskeistä on ymmärtää, että on laskettava yhteen tai vähennettävä aina vain samaa lukuyksikköä olevia numeroita. Ei voi laskea yhteen suoraan esim. ykkösiä ja kymppejä. Lisäksi on ymmärrettävä, että mitään lukuyksikköä ei voi olla yhdeksää enempää, koska täysi kymppi kuuluu jo seuraavaan lukuyksikköön. Hyvin usein esim. allekkainlaskussa lainaamista ei osata, vaan lapsi voi vähentää luvut väärinpäin. Siihen voi vaikuttaa myös tapa, jolla puhumme vähennyslaskusta. Esim. laskun 5-2 voi ilmaista sanoilla ”viidestä vähennetään kaksi” tai ”kaksi vähennetään viidestä” tai ”5 miinus 2” (Fuson 1992, 265). Tämä ongelma on sama myös suomen kielessä. Alle sadan pysyvissä laskuissa olisikin tärkeää ymmärtää lasku, eikä pyrkiä johonkin mekaaniseen ja toistuvaan algoritmiin.

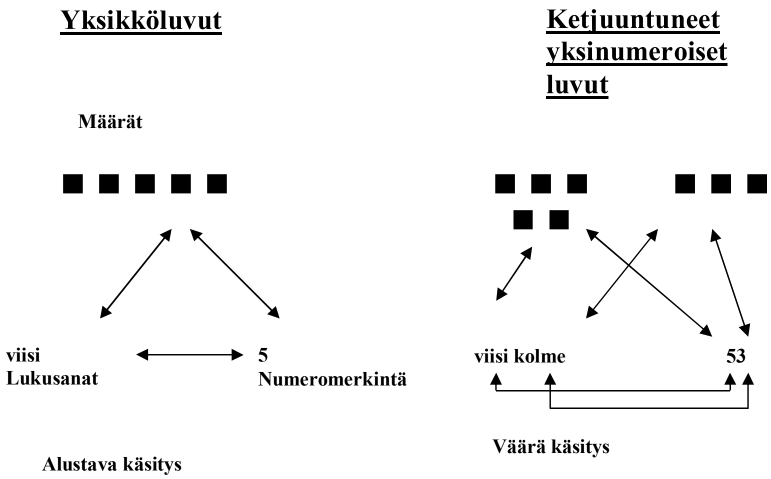
Fuson (1992) erottelee ainakin kaksi erilaista lukuyksikön käsitettä moninumeroisissa luvuissa etenkin luvuissa alle sata, nimittäin koottu (collected) lukuyksikkö tai jaksollinen (sequence) lukuyksikkö. Näistä ensimmäisessä luku muodostuu aina pienemmistä lukuyksiköistä, esim. kymppi on kymmenen ykkösyksikköä, sata on kymmenen kymppiä jne. Jälkimmäisessä tavassa rakennetaan luku lukusanojen avulla laskien kymppien avulla, esim. 10, 20, 30, tai 14, 24, 34, 44. Nyt esim. luvusta 26 päästään suoraan lukuun 36 lisäämällä kymppi eikä välistä tarvitse laskea lukuja 26,27,28 jne. 36:een asti. Tällainen laskutapa ei ole kokemukseni mukaan lapsille mitenkään itsestään selvä.

Fusonin (1992) mukaan edellä kuvatut moninumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskun käsitteet kehittyvät lapsille, kun he voivat ajattelussaan käyttää apuna fyysisiä lukuyksiköiden malleja. Kun lapset lisäävät kymppejä tai satasia, he mielessään ensin näkevät kymppisauvat lisättynä kymppisauvoihin tai vastaavasti satalevyt lisättynä satalevyihin. Tällaisella lähestymistavalla voivat jo toisen luokan oppilaat ymmärtää ja osata laskea jopa nelinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskuja. (Fuson 1992, 265–266.)

Lukuyksiköiden laskeminen sinänsä perustuu samoihin yksinumeroisten lukujen laskuproseduureihin kuin edellisissä luvuissa on esitetty. Esim. laskussa 5862+2574 voidaan ensin laskea tuhannet (viisi, kuusi, seitsemän tuhatta), sitten sadat (kahdeksan sataa, yhdeksän sataa,…, tuhat kolmesataa), sitten kympit ja ykköset. Aina kun summa menee yli kympin myös suurempi lukuyksikkö kasvaa yhdellä. Edellä olevalla tavalla voi siis laskea, kun lasketaan lasku päässälaskulla. Käytännössä tällainen lasku lasketaan usein allekkainlaskun proseduurilla, jolloin laskeminen aloitetaan ykkösistä ja sitten edetään suurempiin lukuyksiköihin. Toisaalta jos kaksinumeroisten lukujen yhteenlaskussa lähdetään liikkeelle ensimmäisestä yhteenlaskettavasta kokonaisuudessaan, esim. 62+74 siten, että lähdetään lisäämään kymppejä ”kuusikymmentäkaksi, seitsemänkymmentäkaksi jne.” on tämä Fusonin (1992, 266) mukaan vaikeampaa kuin edellä esitetty pelkästään lukuyksiköittäin laskeminen. Monilla 2.luokan oppilailla onkin vaikeuksia juuri tällaisissa yli sadan menevissä kymppien lisäämiseen perustuvissa laskuissa. (Fuson 1992, 266.)

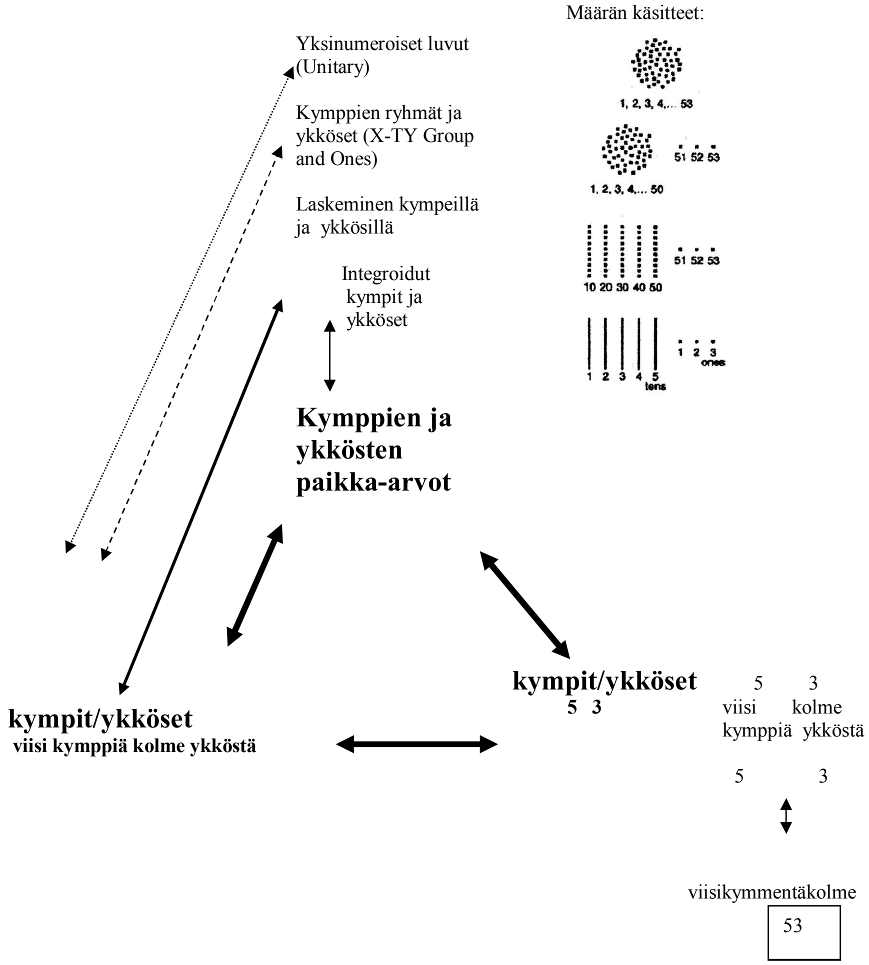
Aiemmassa esityksessään Fuson (1990) pohti nimenomaan sitä, miksi Yhdysvaltalaisissa kouluissa epäonnistutaan yrityksissä auttaa lapsia oppimaan hyvät rakenteet moninumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskuihin. Yhtenä syynä hän näki nimenomaan sen, että lapsilla on vaikeuksia yleistää englanninkielen lukusanojen epäsäännöllisyydet verrattuna numeroihin koskemaan yhteen- ja vähennyslaskun rakenteita.

USA:ssa toteutettiin 15 vuoden tutkimushanke, jossa luokkahuoneissa käytettiin erilaisia pedagogisia apuvälineitä (esim. kymmenjärjestelmävälineitä) ja todellisen maailman välineitä, kuten rahaa, apuna useampinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskun opiskelussa. Tavoitteena oli tarjota kullekin oppilaalle mielekkäät matemaattiset sanat, merkinnät ja operaatiot. Fuson (1998) laati tämän tutkimushankkeen pohjalta mallin lasten useampinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskuista perustuen heidän ymmärrykseensä lukujen paikkajärjestelmästä. Hänen mukaansa lapset voivat ymmärtää useampinumeroisen (multi-digit) luvun yhteen liitettyinä yksittäisinä numeroina (single-digit number) (Fuson 1998, 150). Monilla opettajilla ja oppilailla on tämä menetelmä käytössä. Esimerkiksi luku 53 ymmärretään lukuna viisikolme (ks. kuvio 3). Tämä aiheuttaa tunnetusti virheitä. Tämä ongelma on seurausta siitä, että lapsille ei tarjota riittävästi mahdollisuuksia yhdistää useampinumeroisen luvun merkitys sen numeromerkintään yhteen- ja vähennyslaskussa. (Fuson 1998, 150–151.)



Kuvio 3. Yksikkölukujen kolmiyhteys (määrä, lukusana, kirjoitettu numero) ja ketjuuntunut yksinumeroinen luku (yleinen väärä käsitys moninumeroisista luvuista) (Fuson 1998, 151).

Fusonin (1988) aiemmin tutkijatovereidensa kanssa kehittelemässä ja nyt uudistetussa mallissa on viisi täsmällisesti nimettyä käsitettä: lukumäärä (unitary), kymmenten ryhmä (decade), jaksottaiset kymmenet (sequence-tens), erilliset kymmenet (separate-tens) ja johdetut käsitykset (integrated conceptions) (the UDSSI Triad Model) (Fuson 1988, 151.) Uudistetun mallin hän nimesi Ct-PIV triad malliksi. Tämä malli käsittelee määrien, lukusanojen ja kirjoitetun numeron suhteita. Mallia esitellään kuviossa 4. Voidakseen siis osata laskea kaksinumeroisilla luvuilla oikein on lapsen ymmärrettävä kaikki nämä edellä mainitut käsitteet ja lisäksi niiden on liitettävä oikealla tavalla lukusanoihin.



Kuvio 4. Kaksinumeroisten lukujen käsitteellinen kehittyminen; The Ct-PIV triad malli Fusonia mukaillen. Alkuperäinen malli oli kehitetty englannin ja espanjan kieleen sopivaksi. (Fuson 1988, 152.)

Lukusanajärjestelmät ovat erilaisia eri kielissä. Esimerkiksi eurooppalaisissa kielissä on epäsäännöllisyyksiä. Fusonin (1998) mukaan niitä on erityisesti sanoissa, jotka kuvaavat täysiä kymppejä. Epäsäännöllisyydellä tarkoitetaan tässä yhteydessä sitä, että kymmenjärjestelmän piirteet eivät näy lukusanoissa (Aunio, Hannula & Räsänen 2004, 213). Siten niin englannin kielessä kuin suomenkin kielessä esim. 11 ei voida ilmaista määrällisesti ”kymmenen” ja ”yksi” tai ”ten” and ”one”, vaan sitä vastaa lukusana ”yksitoista” tai englannin kielessä sana ”eleven”. Säännöllisyys sen sijaan näkyy jo lukusanoissa 21, 31, jne. Kiinan kielessä lukusanoilla on selvä yhteys kymmenjärjestelmään. Esimerkiksi yksitoista on kymmenen-yksi (shi-yi) (Aunio, Hannula & Räsänen 2004, 214.)

Aunion, Hannulan ja Räsäsen (2004) mukaan tyypillinen lukusanojen epäsystemaattisuudesta johtuva yleistysvirhe syntyy, kun lapset luettelevat ”kahdeksantoista, yhdeksäntoista, kymmenentoista”. Suomalaisista noin seitsemän vuoden ikäisistä lapsista vain vajaa kaksi kolmasosaa hallitsee hyvin lukujonotaidot luvuilla 1–50 (Kinnunen, Lehtinen & Vauras 1994, 66).

Toisaalta Fusonin, Smithin ja Lo Ciceron tutkimus vuodelta 1997 osoitti, että on mahdollista kehittää jo 1. luokan oppilaille konseptuaaliset rakenteet kaksinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskuun. Apuna vuoden mittaisessa latinokulttuuriin sijoittuvassa opetuskokeilussa käytettiin piirustuksia tai esineitä ryhmittelemään kymppejä ja ykkösiä. Vuoden jälkeen useimmat lapset laskivat sujuvasti ja tekivät laskujen vaatimia kymppien ja ykkösten uudelleenryhmityksiä suoriutuen tehtävistä selvästi keskiverto ekaluokkalaisia paremmin. (Fuson, Smith & Lo Cicero 1997.)

4.5 Tutkimuksia yhteen- ja vähennyslaskustrategioista

Yhteen- ja vähennyslaskustrategian valinta voi vaihdella hyvinkin paljon eri oppilailla ja eri tilanteissa. Siegler (1987) tutki lasten strategian valinnan proseduureja heille tutuissa tehtävissä, kuten aritmetiikassa, ajan kertomisessa ja lukemisessa. Hänen johtopäätöksensä oli, että lapset käyttävät vaihtelevia strategioita monissa tutuissa tehtävissä. Edelleen hänen mukaansa lapset valitsevat strategiansa adaptiivisilla tavoilla esim. laskemalla sormin yhteenlaskuja (backup strategy). Kaikkea strategian valintaa ei ohjaa omaksuttu metakognitiivinen tieto. Lapsen ajattelu on ehkä vähemmin rationaalista ja järkevää kuin mitä olemme tottuneet ajattelemaan. (Siegler 1987, 729–749.)

Edelleen Sieglerin mukaan strategian valintaa ohjaa joskus assosioitu tieto. Esimerkiksi tehtävän 5 + 3 vastauksen voi ajatella assosioituvan ei vain lukuun 8 vaan myös lukuihin 6, 7 ja 9. Näiden yhteyden voimakkuus kuitenkin vaihtelee ja oikea vastaus assosioi voimakkaammin probleeman kanssa kuin väärä vastaus. Toisaalta strategian valintaan vaikuttavien tekijöiden joukossa ovat myös käytössä olevien taustastrategioiden suhteellinen vaikeus, sekä samankaltaisten probleemojen ja operaatioiden tuttuus ja esiintymistiheys. Esimerkiksi kertolaskun $4 \cdot 3$ ratkaisu toistuvalla yhteenlaskulla (laskemalla yhteen neljä kolmosta tai kolme nelosta) on paljon helpompaa kuin ratkaista oikein kertolasku $8 \cdot 7$ samalla tavalla. Lopuksi erot sekä tiedoissa että kognitiivisissa tyyleissä vaikuttavat strategian valintaan. (Siegler 1987, 729–749.)

Myös Carpenterin ja Moserin (1984) mukaan lasten strategian valinta varioi, eivätkä he aina valitse tehokkainta käytössä olevaansa strategiaa. Kuitenkin lapset oppivat käyttämään joitakin tunnettuja lukuihin liittyviä tosiasioita aikaisemmin kuin muita vastaavia. Tällaisia ovat esim. tuplasummat, kuten 6+6=12 tai 7+7=14 sekä lukuyhdistelmät, joiden summa on 10, esim. 6+4=10, 7+3=10 jne. Lapset käyttävät näitä myös vähennyslaskuissa. (Carpenter & Moser 1984.)

Baroody (1999) tutki päiväkoti-ikäisten lasten sekä 1.luokan oppilaiden ymmärrystä yhteen- ja vähennyslaskun yhteenkuuluvuudesta. Lapset olivat iältään 4 vuotta 1 kuukautta - 7 vuotta 4 kuukautta. Baroodyn mukaansa em. Siegler on esittänyt hypoteesina, että lapset jo hyvin varhaisessa vaiheessa assosioivat yhteen- ja vähennyslaskun toisiinsa. Siten esimerkiksi vähennyslasku 8 - 5 =? voidaan laskea yhteenlaskun avulla ajattelemalla 5 + ? = 8.

Baroodyn tutkimuksessaan saamat tulokset eivät tue tätä hypoteesia. Hänen mukaansa yhteen- ja vähennyslaskun yhteys ei ole selvä lapsille. Vaihtoehtoisuuden periaate on tärkeä aspekti numeroiden ymmärtämisessä. Pelkkä ohje ei riitä, vaan lapsille on annettava mahdollisuus ja aikaa löytää tämä yhteys. (Baroody 1999.)

Tutkiessaan 6–8 vuotiaita lapsia Spinillo (2011) huomasi, että lapset kyllä ymmärtävät lukumäärän muuttuvan yhteen- ja vähennyslaskutilanteissa. Kuitenkin vasta noin kahdeksan vuoden iässä lapset ymmärsivät, että jos ensin vähennetään ja sitten lisätään sama lukumäärä; esim. elokuvateatterissa on 48 ihmistä ja sieltä lähtee ensin viisi ihmistä pois ja myöhemmin tulee lisää viisi ihmistä lisää, niin ihmisten lukumäärä pysyy samana. Silloin vasta yhteen- ja vähennyslaskusta tulee aidosti käänteisiä operaatioita.

Baroody ja Gannon (1984) tutkivat vaihdannaisuuden periaatetta ja yhteenlaskun laskujärjestyksen yhteyttä tutkimuksessaan, joka koski 36 päiväkoti-ikäistä lasta. Voisihan nimittäin olettaa, että vaihdannaisuuden periaatteen on oltava tuttu sille, joka osaa valita yhteenlaskun laskujärjestyksen siten, että aloittaa laskemisen suuremmasta yhteenlaskettavasta. Heidän mukaansa kävi kuitenkin ilmi, että vaihdannaisuuden periaate ei ollut selvä kaikille niille, jotka valitsivat tämän tehokkaamman ”laskea kaikki aloittaen suuremmasta yhteenlaskettavasta” strategian. Sen sijaan lapset laskiessaan konkreettisilla välineillä luonnostaan olettavat, että laskujärjestyksellä ei ole väliä. (Baroody & Gannon 1984.)

Gelman (1982) tutki yksi-yhteen vastaavuutta ja luvun säilyvyyttä kolmeneljävuotiailla lapsilla, ja päätteli että lapsilla täytyy olla implisiittinen kyky yksi yhteen -vastaavuuteen. Muuten he eivät olisi selvinneet tehtävistä, joissa verrattiin lukumäärän säilyvyyttä sellaisilla isoilla luvuilla (luvuilla kahdeksan ja kymmenen), joita useimmat lapset eivät vielä osanneet laskea. Gelmannin (1982, 217) mukaan ei voi olla niin, etteivät esikouluikäiset hallitsisi tätä numeroiden ekvivalenssin periaatetta. Hänen mielestään yksi-yhteen vastaavuus on tarpeellinen komponentti laskemisen skeemassa, ja sitä käytetään kun lasketaan. Edelleen Gelman (1982, 217) toteaa, että syntyvää lukukäsitteen hallintaa usein edeltää implisiittinen tieto lukujen rakenteista.

Kerkman & Siegler (1997) tutkivat 113 ensimmäisen luokan oppilaiden yhteenlaskustrategioiden eroja ja niiden suhdetta ns. back up strategioihin, esim. sormien avulla laskemiseen. Heidän tutkimuksensa mukaan eroja lasten strategioissa voidaan todellakin mitata luotettavasti. Yksi tutkimustulos oli, että lapsi, joka käyttää apuna näitä apustrategioitaan, yrittää välttää väärän vastauksen antamista sekä varmistaa samalla, että osaa vastata samaan kysymykseen oikein, jos se tulee esiin uudestaan. Tutkimuksen mukaan lapset, jotka laskevat sormilla eivät välttämättä ole tiedollisesti muita heikompia, he vain haluavat varmistaa laskunsa. Lisäksi olisi tärkeätä laskea oikein laskettaessa sormilla. (Kerkman & Siegler, 1997, 1–18.)

Ostad (1999) tutki matemaattisesti erityisiä vaikeuksia omaavien lasten ja matemaattisesti normaalisti menestyvien lasten strategian valintaa vähennyslaskuissa kaksivuotisessa pitkittäistutkimuksessa, joka sijoittui luokille 1, 3 ja 5 kahdessa kaupunkikoulussa. Osallistujia oli yli yhdeksänsataa lasta, joista kaikkiaan 130 luokiteltiin kuuluvan erityisiä matematiikan oppimisvaikeuksia omaavien ryhmään.

Tuloksena oli, että normaalisti suoriutuvien ryhmässä tapahtui siirtymistä ns. back up strategioiden käytöstä muistiin perustuvaan tunnettujen tosiasioiden käyttöön perustuviin strategioihin (retrieval strategies). Kuitenkin vielä 5. luokan oppilailla oli näitä alkeellisempia back up strategioita lähes 15 %:lla ja 7. luokan oppilaillakin vielä lähes 8 %:lla käytössä. Matemaattisia erityisvaikeuksia omaavilla back up strategiat kehittyivät ja mukaan tuli tunnettujen tosiasioiden käyttöön perustuvia strategioita, mutta kaiken aikaa back up strategiat, etenkin lukusanoilla laskeminen, olivat pääsääntöinen tapa laskea, jopa 99 prosenttisesti. Se myös osoitti, että matemaattisia erityisvaikeuksia omaavien strategiataitojen oppimispolku ei ole vain viivästynyt verrattuna normaalisti oppiviin, vaan se on perustavanlaatuisesti erilainen. (Ostad 1999.)

Torbeyns, Verschaffel & Ghesquière (2001) tutkivat toisen luokan oppilaiden strategian valintaa yksinkertaisissa yhteenlaskutilanteissa alle 20 sijoittuvalla lukualueella. He myös tutkivat erikseen tilannetta, jossa lapsi saa vapaasti valita käyttämänsä strategian sekä tilannetta, jossa häntä ohjataan käyttämään strategiaa 'lisää kymppi täyteen'. Tästä strategiasta käytetään tässä tutkimuksessa myös nimeä 'kympin kautta laskeminen'. Tulokset osoittivat, että lasten käyttämät strategiat vaihtelivat suuresti silloin, kun he saivat itse valita strategiansa. Tällöin he valitsivat strategioita, jotka auttoivat heitä saamaan tuloksen selville suhteellisen nopeasti ja oikein. 'Lisää kymppi täyteen' -strategia näytti hidastavan heidän vastausaikaansa.

Fusonin (1992, 261–262) mukaan matematiikan oppikirjoissa yksinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskut esitetään puutteellisella tavalla. Yleensä on mallina muutama lasku kuvan kanssa ja sitten pitäisi osata laskea pelkillä numeroilla esitettyjä laskuja. Opettajat ja oppikirjantekijät yliarvioivat lasten kyvyn käyttää malleja ja muistiin palauttamista apunaan laskuissa ja aliarvioivat heidän laskemiseen perustuvien strategioiden käyttönsä. Lisäksi monissa luokissa esineiden käyttöön perustuvat samoin kuin tehokkaat numeroihin liittyvät ja muistamiseen perustuvat laskustrategiat eivät ole sosiaalisesti hyväksyttyjä ja niitä pidetään jopa petkuttamisena!

Koponen (2008) tutki väitöstutkimuksessaan kielellisten taitojen yhteyttä matemaattisten perustaitojen, erityisesti peruslaskutoimitusten, kehittymiseen. Hänen tutkimuksessaan oli neljä osatutkimusta, joista kahdessa oli yksilötutkimusasetelma. Kolmannessa osatutkimuksessa tutkittiin, pystytäänkö laskutaidon tarkkuutta ja varmuutta kehittämään harjoittelemalla käsitteelliseen tietoon pohjautuvia laskustrategioita. Lapsen hyvin hallitsemia aritmeettisia faktoja, sellaisia kuin 5+5=10, käytettiin apuna heikommin automatisoituneiden ja virheelle alttiimpien laskujen ratkaisemiseen. Jos 5+5=10, niin mitä on 5+6? Näitä laskuja myös opetettiin merkityksellisissä suhteissa toisiinsa eikä vain irrallisina faktatietoina tai toimintasarjoina. Neljännessä osatutkimuksessa selvisi, että 9–11 vuotiailla dysfaattisilla lapsilla oli selvästi enemmän ikätovereihinsa opetusverrokkeihin verrattuna vaikeuksia matematiikan perustaidoissa. Heidän laskustrategiansa kuitenkin kehittyivät kuntoutuksen myötä. (Koponen 2008; ks. myös Koponen, Aro & Ahonen 2009.)

Lasten luontaista kiinnostusta ympäristönsä lukumäärällisiin aspekteihin tutkivat Hannula, Räsänen ja Lehtinen (2007). He nimesivät tämän kiinnostuksen nimellä ’spontaneous focusing on numerosity’ (SFON). Heidän mukaansa mitä enemmän lapsi kiinnittää huomiota ympäristössään havaitsemiinsa lukumääriin, sitä paremmin hänen varhaiset numeeriset taitonsa kehittyvät. Jatkona tähän tutkimukseen Hannula, Lepola ja Lehtinen (2010) julkaisivat kaksivuotisen pitkittäistutkimuksen, jonka tuloksena oli juuri se, että päiväkoti-ikäisten osoittama luontainen kiinnostus lukumääriin (SFON) on merkityksellinen ennustaja ajatellen lapsen suoriutumista aritmeettisissa laskuissa ensimmäisen ja toisen kouluvuoden aikana.

Myös Liisa Näverin väitöstutkimuksessa, joka käsitteli algebran osaamisen muutoksia peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden ajalta, on osio, jossa kuvataan 2000-luvun alun päättöluokkalaisten käsitteellistä ajattelua. Tuo osio on fenomenograafisesti luokitellut erot oppilaiden algebran käsitteellisessä ajattelussa. Näveri (2009, 122–123) jakaa aineistonsa osaamisen puutteellisten ja kehittymättömien strategioiden osalta neljään eri kategoriaan:

1) ’lukusanojen luettelemiseen liittyvät strategiat’, jolla tutkija tarkoittaa alkeellisia proseduureja, joissa pienillä kokonaisluvuilla summa ja erotus saadaan luettelemalla lukuja esimerkiksi sormin laskien tehokkaampien strategioiden puuttuessa.
2) ’köyhä proseduuri’, jossa oppilas hallitsee puutteellisesti yhteen- ja vähennyslaskujen sidonnaisuuden
3) ’kapseloitunut liian aikaisin’, jossa käsitteiden väliset yhteydet näyttäisivät jäävän kesken.
4) ’muistiin perustuva prosessointi’, jossa ongelmaksi tulee ymmärtävän komponentin puuttuminen ja sitä kautta kykenemättömyys ratkaisujen tarkistamiseen.

Tutkimus on todella mielenkiintoinen mm. siitä syystä, että se osoittaa vielä 9. luokkalaisilla esiintyvän paljon puutteellisia strategioita jopa kokonaislukujen yhteen- ja vähennyslaskuissa. Esimerkkinä Näveri (2009, 123) esittää vähennyslaskun 23-8. Sen oppilas laskee sormin vähentäen 8 ja päätyy tulokseen 15. Sen jälkeen oppilas vielä tarkistaa vastauksen lisäämällä ’ajatuksissa’ 8:n viiteentoista päätyen lukuun 23. Tämä tapa oli tavallisimpia tapoja laskea ko. esimerkkilasku. Kehittyneempi proseduuri oli laskea edellinen lasku ’päässä’ siten, että ensin vähennettiin 3 luvusta 23, ja sitten, koska 8:sta jäi jäljelle 5, vähennettiin 20:stä viisi ja saatiin vastaus 15.

4.6 Mentaaliset strategiat

Edellä on jo kuvailtu tutkimuksia, joissa on tutkittu lasten käyttämiä strategioita yhteen- ja vähennyslaskuissa. Näitä strategioita on mahdollista nimittää myös nimellä ’mentaaliset strategiat’. Käsitteen voisi suomentaa myös sanalla ’päässälaskustrategiat’. Kun puhutaan mentaalisista strategioista, ei ole kuitenkaan helppo sanoa, voiko niitä opettaa oppilaille, vai syntyvätkö ne oppilaalle kypsymisen ja kokemuksen kautta.

Mentaaliset laskustrategiat eroavat Hartnettin (2007) mukaan kirjoitetuista vastaavista siinä, että ne ovat vaativampia kuin vain muistamiseen perustuva proseduuri. Ratkaiseva ero on siinä, että ne vaativat syvempää tietämystä siitä, miten luvut toimivat. Mentaalisten laskustrategioiden joustava käyttö vaatii hyvää lukujen tuntemusta (number sense) ja tarkoittaa ennemminkin strategista lähestymistapaa laskemiseen kuin keskittymistä proseduraaliseen algoritmiin. Oppilailla on mahdollisuus työskennellä lukujen kanssa joustavalla tavalla, toisin sanoen heillä on mahdollisuus kehittää heidän numerotuntemustaan. Numerotuntemus ja mentaaliset laskustrategiat ovatkin hyvin läheisessä yhteydessä toisiinsa. (Hartnett 2007, 345–346.)

Esimerkkinä mentaalisesta strategiasta voidaan mainita strategia, joka on nimetty 'N10' (Number+10 tai Number-10). Siinä esimerkiksi lasku 48+26 lasketaan sen kautta, että 48+10=58 ja 58+10=68, sitten lasketaan 68+6=74. Tätä voi verrata aiemmin esitettyyn Fusonin esittämiin jaksottaisiin kymppeihin (sequence-tens). Toinen strategia on nimetty '1010'-nimellä. Siinä edellä oleva lasku lasketaan siten, että ensin lasketaan täydet kympit 20+40=60 ja seuraavaksi lasketaan 8+6=14 ja sitten vielä 60+14=74. Tätä Fuson nimitti laskemiseksi erillisillä kympeillä (separate-tens). (Beishuizen 1998.) Mentaaliset strategiat ovat siis erilaisia verrattuna kirjoitettuihin algoritmeihin. Esimerkiksi edellä kuvailtu lasku 48+26 on kirjoitetussa muodossa helppo laskea allekkainlaskun proseduurilla, mutta silloin käytetään eri strategioita kuin edellä mainitut mentaaliset strategiat.

Beishuizenin (1998) mukaan hollantilaiset tutkimukset ovat osoittaneet, että heikommin menestyvät oppilaat käyttävät useammin '1010' strategiaa, kun taas monet paremmin menestyvät oppilaat omaksuvat 'N10' menetelmän tehokkaampana laskemisen proseduurina. Heikommille oppilaille 'N10' vaatimat hyppäykset lukusuoralla eivät onnistu. Kuitenkin pidemmän päälle '1010'menetelmä aiheuttaa ongelmia, kun sen avulla sellaiset laskut kuin esim. 88-49 muodostuvat ongelmiksi. Ongelman aiheuttaa tietenkin se, että vähentäjässä on ykkösten paikalla suurempi luku kuin vähenevässä.

Gervasoni (2006) tutki 1. j 2. luokan oppilaiden yhteenlaskustrategioiden käyttöä oppilailla, jotka olivat luokiteltu haavoittuviksi omassa lukujen opiskelussaan (vulnerable in their number learning). Tässä tapauksessa 1. luokan oppilaat olivat 6-vuotiaita ja 2. luokan oppilaat 7-vuotiaita. Tulokset osoittivat, että jotkut 1. ja 2. luokan oppilaat olivat kykenemättömiä ratkaisemaan yksinkertaisiakaan yhteenlaskutehtäviä edes yhden tai kahden vuoden koulunkäynnin jälkeen. Monet oppilaat eivät myöskään kyenneet käyttämään kehittyneempää laskutekniikkaa (count on) kuten eivät päättelyyn perustuvia strategioitakaan. Huomattava osa oppilaista turvautui alkeellisempaan strategiaan, jossa lasketaan aina ensimmäisestä yhteenlaskettavasta alkaen (count all -strategia). (Gervasoni 2006, 177.) Tämä alkeellisin strategia oli lisäksi erityisesti heikompien 2. luokan oppilaiden käyttämä strategia (Gervasoni 2006, 183).

ENRP-projektin strategiatprofiilit:

Gervasoni (2006) luokitteli oppilaiden käyttämiä strategioita käyttäen pohjana Australiassa 'Early Numeracy Research Project'-tutkimusprojektissa kehitettyjä strategiaprofiileja. Tämän ENRP -projektin kehityspisteet oppilaan yhteen- ja vähennyslaskulle ovat:

0 ei vielä kykene yhdistämään ja laskemaan kahta eri esineiden ryhmää
1 laskee kaikki esineet löytääkseen kokonaismäärän (count all (two colections))
2 laskee toisesta numerosta löytääkseen kokonaismäärän (count on from one number to find the total of two collections)
3 laskee takaisin/ laskee alaspäin / laskee ylöspäin (annetussa vähennyslaskutilanteessa valitsee sopivan strategian, johon voi sisältyä se, että luvusta lasketaan takaisinpäin/ alaspäin/ ylöspäin)
4 perusstrategiat (tuplaluvut, vaihdannaisuus, 10 lisääminen, kymppiin liittyvät tosiasiat, muut tunnetut ja ilmeiset tosiasiat)
5 johdetut strategiat (lähellä tuplasummaa, 9:ään lisääminen, lasketaan 10:n täyteen, tunnetut tosiasiat, intuitiiviset strategiat)

(Gervasoni 2006, 180)

Tämä ENRP-projektin ja Gervasonin käyttämä luokitus on mielenkiintoinen ja kertoo oikeastaan siitä, miten monipuolisesti erilaisia strategioita on mahdollista luokitella. Pohjana siitä löytyy aivan ilmeisesti 1980- luvuilla ja 1990-luvuilla tehty laskemisen strategioiden luokitus, jolloin tutkittiin paljon mm. vaihdannaisuutta ym. nimenomaan laskemiseen liittyviä strategioita. (esim. Steffe et. al. 1983; Fuson 1992; Clarke, McDonough & Sullivan 2002; Baroody & Gannon 1984; Carpenter & Moser 1984.) Tutkittiin siis esimerkiksi sitä, osasiko lapsi laskea vaikkapa laskun 2+6 vaihtaen sen mielessään laskuun 6+2, joka on helpommin laskettavissa.

Clarke, McDonough & Sullivan (2002) raportoivat siitä, miten ENRP-kehityspisteet (growth points) antavat mahdollisuuden opettajalle kuvailla oppilaan matematiikan oppimista ja miten haastattelut mittaavat tätä oppimista. Samalla ne näyttävät oppimiselle suuntaa ja opettajille muodostuikin selvä kuva oppilaiden tyypillisistä kehityskaarista. Tällainen kuva auttaa opettajaa suunnittelemaan luokkansa opetusjärjestelyjä. Samalla opettajien ammatillinen pätevyys tehdä omia ratkaisuja sekä itseluottamus näyttävät lisääntyvän. (Clarke, McDonough & Sullivan 2002.)

Tässä tutkimuksessa en ole niinkään kiinnostunut laskemisen aloitusluvusta enkä vaihdannaisuudesta, joten luokittelun luokat 1–3 ovat mielestäni hyvin lähellä toisiaan. Samoin näen luokkien 4 ja 5 liittyvän kiinteästi toisiinsa. Nimittäin luokissa 1–3 oppilas laskee aivan ilmeisesti lukusanoja luettelemalla, tosin niin, että luokassa 3 hänellä on jo käytössä varsin monipuoliset strategiat. Luokissa 4–5 oppilas osaa jo ositella lukuja, tuntee lukuihin liittyviä tosiasioita, kuten tuplasummat tai jopa osaa vastauksen automaation tasolla. Omassa tutkimuksessani olen kiinnostunut siitä polusta, jota pitkin oppilas siirtyy vaiheista 1–3 vaiheisiin 4–5. Oletan, että tämä polku on hyvin erilainen erilaiset matemaattiset taidot omaavilla oppilailla.

Gravemeijer (2002) raportoi opetuskokeilusta, jossa oppilaat harjoittelivat muovisten Unifix-kuutioiden avulla rakentamaan lukujonoja aina 100 asti. Aluksi he erottelivat 10 kuution jonoja ja sitten laskivat näihin yhteen tai vähensivät näistä ykköskuutioita. Seuraavassa vaiheessa he tekivät itselleen kymmenen kertaa kymmenen Unifix-kuution mittaisen paperisen mittanauhan. Mitatessaan tällä nauhalla oppilaan huomio kiinnittyi erityisesti 10 kuution muodostamaan yksikköön sekä toisaalta yhden kuution mittaiseen yksikköön. Seuraavassa vaiheessa huomio siirretään varsinaisesta mittaamisesta erilaisiin mittaamiseen liittyviin päättelyihin. Voidaan esim. vertailla sellaisten objektien pituuksia, jotka eivät ole fyysisesti läsnä. Samalla opetellaan vielä siirtämään laskutehtäviä tyhjälle lukusuoralle. (Gravemeijer 2002.)

Avain edellä kuvatussa harjoittelussa on se, että eteneminen kohti muodollisempaa matemaattista päättelyä on kytketty uuden matemaattisen todellisuuden luomiseen. Tämä matemaattinen malli koski lukuja 100 asti ja se toimi samalla mallina lukujen välisille suhteille. Myöhemmin oppilas näkee luvun edelleen lukumäärään kytkettynä matemaattisena yksikkönä, mutta se ei ole enää sidoksissa johonkin tiettyyn objektien joukkoon. Sen sijaan luku saa merkityksensä sijainnistaan lukujen järjestelmässä. Tämä järjestelmä puolestaan voi sisältää sellaisia lukujen suhteita kuten esim. 37=30+7, 37=3x10+7, 37=20+17, 37=40-3 (Gravemeijer 2002, 127). Kriittinen aspekti tässä lukujen ymmärtämisessä on se, että oppilas osaa yleistää nämä lukujen suhteet yli yksittäisten tapausten. Tätä käsitystä luvuista matemaattisina objekteina, jotka saavat merkityksensä lukujen suhteista, Gravemeijer nimittää uudeksi matemaattiseksi todellisuudeksi (Gravemeijer 2002, 127).

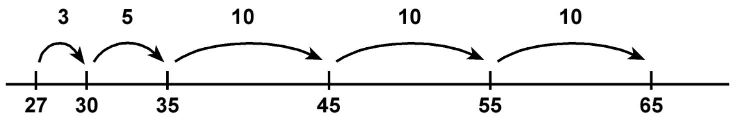
Realistinen matematiikan opetus:

Beishuizen (1998) kuvaa ns. realistista matematiikan opetuksen (RME) teoriaa Hollannista, joka on tuottanut radikaalin opetussuunnitelman muutoksen tuossa maassa sekä malleja kuten tyhjän lukusuoran yhteen- ja vähennyslaskuihin. Siinä lukuja käsitellään kokonaisuuksina. Kaksinumeroisillakin luvuilla lasketaan ensin laskuja henkisesti ”päässä laskien”. Samalla allekkain laskun algoritmi opetetaan vasta vähän myöhemmin. (Beishuizen 1998.)

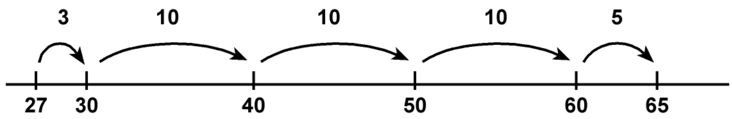
Pohjana tälle on Beishuizenin (1998) mukaan Freudenthalin (1973) esittämä vastaus niin sanotun uuden matematiikan (New Maths) ajatuksille. Freudenthal esitti vaihtoehtoisena mallina sen, että sen sijaan, että pitäydytään muodollisessa matematiikassa (jota tuetaan visuaalisilla apuvälineillä ja konkreettisella materiaalilla) niin yhdistetään lapsen varhaiset matemaattiset kokemukset hänen omiin epämuodollisiin laskemisen strategioihinsa. Sellaiset strategiat kuin laskeminen kahden välein, viitosilla tai kympeillä nähtiin uudeksi ja tärkeäksi matemaattiseksi aktiviteetiksi. Tämä osissa laskeminen voitiin laajentaa laskemiseen kympeillä aina sataan saakka. (Freudenthal 1973.)

Edellä mainittiin tyhjän lukusuoran malli. Seuraavassa on esimerkkilasku 27+38 laskettuna tyhjän lukusuoramallin avulla. Kuviossa 7 on kolme vaihtoehtoista esimerkkiä oppilaan ratkaisusta lukusuoralla.

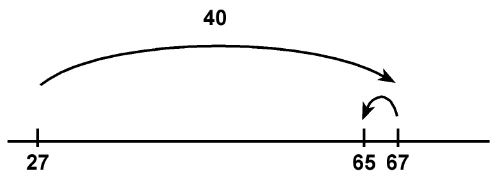
Tehtävä 27+38 ratkaistuna: 27+3 = 30, 30+5 = 35, 35+10 = 45, 45+10 = 55, 55+10 = 65



Tehtävä 27+38 ratkaistuna: 27+3 = 30, 30+10 = 40, 40+10 = 50, 50+10 = 60, 60+5=65

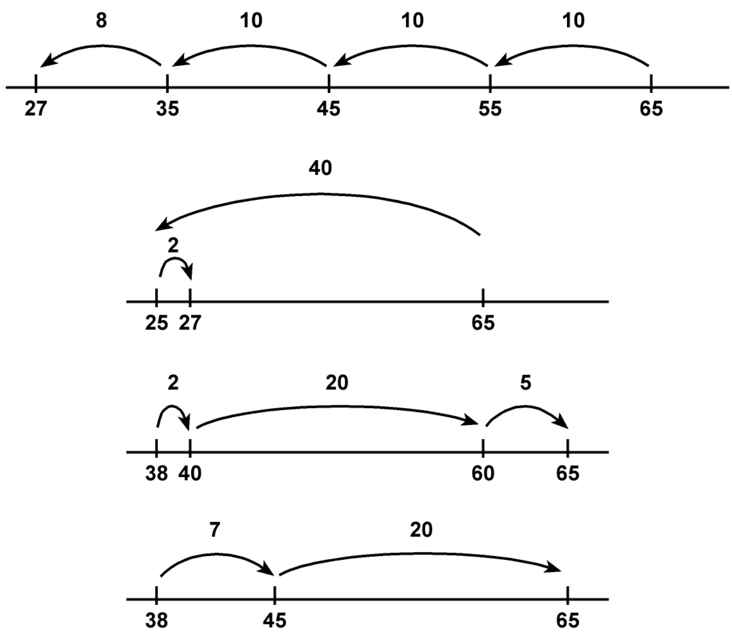


Tehtävä 27+38 vaihtoehtoinen ratkaisu: 27+40 = 67, 67-2 = 65



Kuvio 5. Tyhjän lukusuoramallin käyttö realistisessa matematiikan opetuksessa (Gravemeijer 1994, 457.)

Seuraavassa vielä vähennyslasku 65-38 lukusuoran avulla laskettuna.



Kuvio 6. Erilaisia ratkaisustrategioita laskulle 65-38 (Gravemeijer 1994, 458).

Huomataan, että lasku 65-38 on mahdollista laskea myös yhteenlaskun kautta miettien, kuinka suuri on väli luvusta 38 lukuun 65. Nämä ratkaisustrategiat ovat esimerkkejä mentaalisista strategioista, joita etenkin 2. luokalla on syytä harjoitella. Kun niitä opitaan tarpeeksi hyvin, edistää se lukukäsitteen hyvää omaksumista. Lukualue 0–100 tulee ymmärrettäväksi, se tulee ikään kuin näkyväksi oppilaalle. Tämän jälkeen lukualuetta on helppo laajentaa yli sadan meneviin lukuihin.

Kuitenkin tyhjän lukusuoran malli voi olla ongelmallinenkin. Gravemeijerin (1999, 165) mukaan yksi ongelma liittyy siihen, että se ei motivoi miettimään kaikkia tarpeellisia laskuihin liittyviä toimintoja. Toinen ongelma on se, että se ei ole niin konkreettisesti kosketettavissa kuin vaikkapa erivärisistä helmistä koottu helminauha.

Lukusuora voi tietenkin olla myös strukturoitu. Esimerkiksi kokonaisluvut on merkitty yhden välein ja numeroitu joko kaikki tai vaikkapa viiden välein. Tällaisella lukusuoralla laskeminen poikkeaa laskemisesta avoimen lukusuoran avulla. Siinä luvun paikka on tarkasti määritelty graafisena etäisyytenä nollapisteestä. Se vaatii siis graafista lukutaitoa. Diezmannin ja Lowrien (2007) kolmivuotisessa tutkimuksessa oppilaiden ymmärrys lukusuoran käytössä lisääntyi jossakin määrin. Kuitenkaan erilaiset lukusuoraesitykset eivät tukeneet toisen lukusuoraesityksen ymmärtämistä vaan ne ymmärrettiin pikemminkin erilaisina esityksinä kuin samanlaisina.

Suomalaisiin oppikirjoihin on Kerannon ja Sareniuksen (2010) mukaan uutena piirteenä otettu lukujärjestelmän opetuksen tueksi lukusuora aivan ensimmäisen luokan alusta lähtien. Tämä ei heidän mukaansa kuitenkaan ole ongelmatonta. Lukusuoran käyttö edellyttäisi niin mittaamisen taitoja kuin spesifiä tietoa numeerisen esityksen ja lukusuoraesityksen vastaavuudesta. Se ei kaikilta oppilailta suju luonnostaan, vaan siinä tarvitaan opettajan ohjausta. (Keranto & Sarenius 2010.)

Koonti mentaalisista strategioista:

Varol ja Farran (2007, 90) määrittelevät kahdeksan erilaista strategiaa alakoulun (elementary) oppilaiden yhteen- ja vähennyslaskuihin. Ne on esitetty taulukossa 2.

Taulukko 2. Mentaaliset strategiat yhteen- ja vähennyslaskuun (Varol & Farran 2007, 90).

Strategiat	**Yhteenlaskuesimerkki 36 + 27**	**Vähennyslaskuesimerkki 74 - 69**
N10	36 + 20 = 56; 56 + 7 = 63	74 – 60 = 14; 14 – 9=5
N10C	36 + 30 = 66; 66 – 3 = 63	74 – 70 = 4; 4 + 1 = 5
10s	30 + 20 = 50; 50 + 6 = 56; 56 + 7 = 63	70 – 60 = 10; 10 + 4 = 14; 14 – 9 = 5
1010	30 + 20 = 50; 6 + 7 = 13; 50 + 13 = 63	70 – 60 = 10; 4 – 9 = -5; 10 + (-5) = 5
A10	36 + 4= 40; 40 + 23 = 63	74 – 4 = 70; 70 - 65 = 5
Laskeminen		Laskeminen taaksepäin alkaen luvusta 74 ja päätyen lukuun 69
Lyhyt hyppy		69∩70∩74 = 1 + 4 = 5
Kuva mielessä kynä ja paperi algoritmista	Lasketaan mielessä kuin kynä ja paperialgoritmilla	

’Kuva mielessä kynä ja paperialgoritmilla’ tarkoitetaan siis allekkain laskua päässä laskien. (ks. Heirdsfield & Cooper 2004). Se on kuitenkin strategia, jota käyttävät oppilaat, jotka eivät ole joustavia strategian valinnassaan. (Varol & Farran 2007; Heirdsfield & Cooper 2004.)

Lucangelin et al. (2003) mukaan tyypillisesti koulussa opetettavat strategiat korvautuvat muilla strategioilla sekä kirjoitetuissa että mentaalisissa laskutoimituksissa, mutta nämä uudet strategiat eivät kuitenkaan ole tehokkaita. Heidän tutkimus kohdistui 200 oppilaaseen kolmannella, neljännellä ja viidennellä luokalla ja se käsitti sekä mentaaliset että kirjoitetut moninumeroisten lukujen yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskun. Pohtiessaan kirjoitetun ja mentaalisen laskemisen tehokkuutta tutkijat huomasivat, että kirjoitetut algoritmit olivat tehokkaita yhteenlaskun osalta alkaen kolmannesta luokasta ja vähennyslaskun osalta neljännestä luokasta alkaen. (Lugangeli et al 2003, 517.)

Tutkijat ovat siis huomanneet ’päässä laskemisen’ tärkeyden ja sen vaikutukset oppilaan menestymiseen matematiikassa. Nämä mentaaliset päässälaskutaidot auttavat oppilasta ymmärtämään, miten luvut toimivat, kuinka tehdä päätöksiä eri proseduureissa ja kuinka luoda erilaisia strategioita matemaattisiin ongelmiin (Varol & Farran 2007, 94). Edelleen on painotettu assosiaatiota konseptuaalisen ymmärtämisen ja mentaalisen laskutaidon välillä. Erityisesti on esitetty, että oppilaat, jotka osoittivat omaavansa konseptuaalista ymmärtämistä, todennäköisesti kehittävät myös syvemmän ymmärtämisen mentaalisiin laskutaitoihin. (Varol & Farran 2007, 94.)

Vaikka mentaalisten laskutaitojen ja strategioiden tärkeydestä ollaan yhtä mieltä, ei kuitenkaan ole yksimielisyyttä siitä, pitäisikö mentaalisia strategioita opettaa lapsille ja jos pitäisi, niin miten? Varol ja Farran (2007, 94) pohtivat ensinnäkin sitä, pitäisikö lapsille antaa mahdollisuus keksiä näitä strategioita itse heidän oman taitonsa ja taitojensa pohjalta? Ja toiseksi, jos lapsille opetetaan näitä strategioita, pitäisikö heidän saada valita strategiat oman mieltymyksensä mukaan? Tähän kaikkeen kaivataan lisää tutkimusta.

BAMT-metodi:

Murata ja Fuson (2006) raportoivat tapaustutkimuksesta, jossa Yhdysvalloissa sijaitsevassa japanilaisessa koulussa 25 ensimmäisen luokan oppilasta saivat opettajaltaan erityistä keskusteluun perustuvaa ohjausta opetellessaan käyttämään yhteenlaskussa kymmenylityksessä metodia, jossa yhteenlaskussa täydennetään ensin kymppi täyteen. Menetelmä on siis sama kuin jo edellä kuvattu ’lisää kymppi täyteen’ tai omassa luokassamme käytössä ollut sanonta ’laskea kympin kautta’.

Metodin he nimesivät BAMT-metodiksi (the Break-Apart-to-Make-Ten). Siinä esim. yhteenlaskussa 9+4 opiskelija ensin miettii, mitä 9:ään tarvitaan lisää, jotta siitä saadaan täysi 10. Silloin hän käyttää tietämystään ns. kymppipareista, siis että 9 ja 1 muodostavat yhdessä 10, mutta tuntematon on muodossa 9+n=10. Seuraava askel on erottaa toinen yhteenlaskettava 4 muotoon ”yksi, joka tarvitaan tekemään kymppi täyteen ja loput neljästä”, siis 4=1+n. Vaihe 3 alkaa, kun yhteenlasku on muuttunut muotoon 10+3, (kun 9 ja 1 on yhdistetty kympiksi). Nyt siis 9+4=9+1+3. Viimeisessä vaiheessa opiskelija siis laskee yhteen 10 ja 3 käyttäen tietämystään, että siitä tulee 13. Tässä on apuna myös japaninkielen lukusanat, joissa yli kympin menevät luvut muodostuvat periaatteella 11 on *kymmenen yksi*, 12 on *kymmenen kaksi*, 13 on *kymmenen kolme*, jne. (Murata & Fuson 2006, 430–431.)

Ennen varsinaisen BAMT-metodin käyttöönottoa oppilaan pitää hallita kymmentä pienempien lukujen ja luvun 10 hajottaminen osiin, esim. 6=5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3. Hänen on myös hallittava yli kymmenen olevien lukujen muodostuminen 10:stä ja toisesta luvusta, esim. 10 + 2 =12, 18 - 8 = 10 sekä kolmen yhteenlaskettavan käyttö, esim. 4 + 6 + 3 =10 + 3= 13, tai 15 - 5 – 9 = 10 - 9 = 1.

Kuviossa 7 on havainnollistettu BAMT-metodin käyttöä esimerkkilaskulla 9+4. Huomataan, että menetelmässä pitää ymmärtää, että 9 vaatii lisää 1:n täydentyäkseen kymmeneksi. Tämä havainnollistetaan palikoilla tai sormilla. Samalla huomataan, että neljästä jää jäljelle 3 palikkaa tai sormea, jotka sitten lisätään 10:een. Visuaalisesti on myös mahdollista esim. taululla jakaa luku 4 lukuihin 3 ja 1. Näistä siten 1 liitetään 10:een ja huomataan, että lasku muotoutuu muotoon 10+3.

BAMT- metodin askeleet laskussa 9+4	**Askel 1** Keksi. että 9:ään tarvitaan 1 lisää niin, että saadaan 10	**Askel 2** Jaa luku 4 lukuun 1 ja ’muuhun osaan’ (3:een)	**Askel 3** Laske 9 ja 1 on yhteensä 10	**Askel 3** Lisää 10:een 3 niin, että saat tulokseksi 13
Palikoiden avulla vaihdetaan lasku 9+4 laskuksi 10+3	Laske 9 palikkaa ja 4 palikkaa, siirrä 1 palikka 4:n palikan ryhmästä muuttaaksesi 9:n ryhmä 10:ksi	Huomaa, että 4:n ryhmästä tuli nyt 3:n palikan ryhmä	Vain katso ja ajattele, että 9 ja 1 on 10 (10:n muodostaminen oli esillä jo 1. askeleessa)	Näe 10 palikkaa ja 3 palikkaa ja ajattele kymmenenkolme tai laske ’kymmenen-yksi’, ’kymmenen-kaksi’, ’kymmenen-kolme’
Sormien käyttö tekee jokaisen askeleen erikseen näkyväksi	Avaa 9 sormea, huomaa, että tarvitaan yksi sormi lisää, jotta saavutetaan 10	Avaa 4 sormea, taivuta 1 ja huomaa, että jäljellä on vielä 3 sormea	Avaa 9 sormea, avaa 1 lisää ja näe 10 sormea, tai muista, että tämä on jo tehty askeleessa 1	Avaa 10 sormea, sano: kymmenen, sulje ne ja avaa 3 sormea lisää ja laskeeteenpäin [’kymmenen-yksi’, kymmenen-kaksi’, ’kymmenen-kolme’] tai tiedä, että 10 ja 3 on 13
Visuaaliset esittävät piirrokset, tekevät vanhojen ja uusien ongelmien numeerisen polun sekä muutosprosessit näkyviksi	9 + 4 1 Viiva numero 4:n alla kohti 9:n ja 4:n väliä auttaa opiskelijaa ymmärtämään sen, että hänen on mietittävä 9:n kymppiparia	9 + 4 1 3 Kaksi viivaa numero 4:n alla osoittavat sen, miten numero 4 on jaettu kahdeksi osakseen	9 + 4 10 1 3 1:n ja 9:n ympyröiminen osoittaa, miten ne yhdessä muodostavat 10:n	9 + 4 = 13 10 1 3 Näyttää, että 3 on ainoa numero, joka ei ole vielä 10:n pari. Siis 10 + 3.

Huomaa: Kahta ensimmäistä askelta tukee myös kielellinen termi ”parit” tarkoittaen kahta yhteenlaskettavaa, jotka muodostavat kokonaisuuden. Viimeistä askelta tukee myös japanin kielen muoto luvulle 13, joka on yhtä kuin ”kymmenen kolme”. Kun luvut kirjoitettiin taululle ja muistivihkoon, ympyröidyt luvut sekä luku 10 askeleessa 3 merkittiin korostaen punaisella.

Kuvio 7. BAMT-metodin käyttö esimerkkilaskussa 9 + 4 (Murata & Fuson 2006, 428.)

BAMT-metodin käytön Murata ja Fuson perustivat Vygotskyn perintöön nojaavaan ZPD (Zone of Proximal Development) oppimisteoriaan, jonka he muokkasivat malliksi matemaattisesta pätevyydestä (Model of Mathematical Profiency). Malli perustuu kahdenlaiseen aktiviteettiin: opetuksellisiin keskusteluihin, jotka lisäävät ymmärrystä ja harjoitteluun, joka lisää osaamisen sujuvuutta. Malliin sisällytettiin ’luokan oppimispolku’, joka puolestaan muodostuu pienestä määrästä oppilaiden omia ’oppimispolkuja’. (Murata & Fuson 2006.)

Tarkemmin sanottuna Murata ja Fuson perustivat oppimismallinsa Tharpin ja Gallimoren (1988) näkemykselle Vygotskyn lähikehityksen vyöhykkeestä (ZPD).

Siinähän oppimisen katsotaan tapahtuvan, kun oppilasta autetaan sopivalla tavalla hänen työskennellessään omalla lähikehityksen vyöhykkeellään. (Tharp & Gallimore, 1988, 41.) Murata ja Fuson katsoivat, että BAMT-metodi sopi hyvin tähän luokan lähikehitysvyöhykkeeseen (Class Learning Zone), koska se monimutkaisuudessaan on vaativa vähemmän edistyneille oppilaille. Samalla oppilaiden edistyminen BAMT-metodissa on tärkeää myös heidän myöhemmälle useampinumeroisten lukujen yhteenlaskutaidoille. Heidän mallissaan apua tarjottiin oppilaalle vain silloin kun sitä tarvittiin.

Tulokset osoittivat, että oppilas siirtyi vuoden mittaan aloitustasolta, jossa hän tarvitsi apua ymmärtääkseen, mitä yhteenlasku on, laskemisen kautta (countin all ja counting on) BAMT-metodin käyttöön. Oppiminen oli luokassa interaktiivinen prosessi. Paremmin edistyneet oppilaat auttoivat heikommin edistyneitä. Lopuksi tutkijat toteavat, että BAMT-metodi on tärkeä, mutta se ei ole niin suureksi avuksi oppilaille, joiden kielessä lukusanat eivät ole muotoa *kymmenen yksi*, *kymmenen kaksi*, jne. Kuitenkin tiedämme, että useimmissa kielissä ei näin ole. BAMT-metodi tulee tärkeäksi useampinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskussa. Silloin myös oppilaat alkavat ositella lukuja BAMT-metodin tapaan laskiessaan lukusarakkeita ja siirtyessään seuraavaan 10 yksikköön. (Murata & Fuson 2006.)

Tämä BAMT-metodi on sama, jota myöhemmin tässä tutkimuksessa nimitetään 'kympin kautta' laskemiseksi. Se sisältyy myös niihin strategioiden joukkoon, joita tutkijat ovat nimittäneet yhteisellä nimellä 'tunnettuihin tosiasioihin perustuvat strategiat' (derived fact and known fact procedures) (esim. Fuson 1992; Gervasoni 2006.)

4.7 Yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden merkitys oppilaan matemaattiseen menestykseen

Cumming & Elkins (1999) tutkivat, miten tehokkaiden yhteenlaskutaitojen ja automaation puute peruslaskutoimituksissa vaikuttavat oppilaiden kykyyn ratkaista monimutkaisempia tehtäviä luokille 3–6 sijoittuvassa tutkimuksessaan (109 lasta, iältään 7–11 vuotta). Tuloksena oli, että suoriutuminen useampinumeroisten lukujen yhteenlaskuissa oli sidoksissa ja luultavasti seurausta yhteenlaskujen prosessoinnin tehokkuudesta. Hitain ryhmä pyrki aina käyttämään samoja laskustrategioita tehtävissä, kun taas nopein ryhmä käytti mieleen palauttamista ja tehokkaita laskustrategioita. Useimmat virheet moninumeroisissa laskutehtävissä johtuivat puutteista perusasioissa, eivät algoritmivirheistä. (Cumming & Elkins 1999.)

Gersten, Jordan ja Flojo (2005) tutkivat matematiikan oppimisvaikeuksia ja päätyivät mm. siihen tulokseen, että nämä oppimisvaikeudet vaihtelevat ajan mittaan. Heidän mukaansa aivan ratkaisevaa on nopea lukuihin liittyvien yhdistelmien mieliin palauttaminen, sillä oppilaat eivät voi ymmärtää lukukäsitteeseen tai ongelmanratkaisuun liittyvää dialogia elleivät he automaattisesti tiedä, että 6+4 on 10 tai tuplaamalla 8 saadaan 16 jne. Oppilaat, jotka yhä laskevat sormin sellaisia laskuja kuin 7+8 tai 3x2 ovat todennäköisesti täysin eksyksissä silloin, kun opettaja olettaa heidän osaavan nämä laskut vaivatta silloin kun opetellaan jotain uutta olennaista ongelmaratkaisuun liittyvää käsitettä tai vaikkapa jakolaskua.

He myös voimakkaasti argumentoivat varhaisen intervention puolesta silloin, kun oppilaalla on matematiikassa oppimisvaikeuksia. Heidän mukaansa sujuvuus ja tarkkuus lukuyhdistelmissä vaatii kypsyneiden strategioiden käyttöä, ja näyttää siltä, että jotkut oppilaat tarvitsevat tässä ohjausta vaikka kaikki eivät tarvitsisikaan. (Gersten et al. 2005, 300). Tätä väitettä kommentoidessaan Hanley (2005, 348) argumentoi sen puolesta, että koulujen ja hallintoihmisten pitäisi lisätä voimavaroja varhaiseen interventioon, esimerkiksi lisäämällä erityisopetuksen varoja.

Oppilaat hyötyvät siitä, että heitä rohkaistaan ajattelemaan ääneen, kun he työskentelevät tai vaihtavat ajatuksia toistensa kanssa (Ketterlin-Geller, Chard & Fien 2008, 35). Samojen tutkijoiden mukaan oppilaat opiskellessaan konkreettisen instruktion avulla oppivat mallintamaan matemaattisia ongelmia käyttäen samalla kuvallisia piirustuksia. Lopulta kun oppilaiden kuvallisten esitysten sujuvuus paranee, ohjaus kohdistuu abstrakteihin symboleihin. He myös rohkaisevat identifioimaan oppilaat, joilla on riski epäonnistua matematiikassa, ja parantamaan heidän suorituksiaan sopivalla tuella. (Ketterlin-Geller et al. 2008; vrt. Peled & Bassan-Cincinatus 2005; English & Watters 2005.)

Pitta-Pantazi, Gray & Christoun (2002) tutkimuksessa tutkittiin 16 iältään 8–11 -vuotiaiden lasten laskustrategioita yhteen- ja vähennyslaskussa siten, että käytössä oli jako kahteen eri suoritustason ääripäähän: heikommin menestyviin ja menestyviin. Tuloksena oli, että heikommin menestyvät turvautuivat strategioihin, joissa oli apuna fyysisiä esineitä tai vaikkapa sormet. Heidän piti laskea koskemalla toisen käden sormilla toista kättä, pöytää tai jopa nenää. Joskus tällainen sormilla laskeminen tapahtui niinkin, että sormet eivät liikkuneet. Heidän laskustrategiansa olivat pitkiä. He turvautuivat myös lukusuoraan ja aina heidän strategiansa oli laskeminen.

Hyvin menestyvät sen sijaan pystyvät näkemään selkeästi laskun objektit, tiivistämään laskuproseduurit tai jopa usein jättämään sen pois ja pystyvät näin todella abstraktisesti selvittämään tehtävän. Heidän painopiste on matemaattisissa symboleissa, tekeillä olevassa prosessissa ja käsitteissä, jotka pitää tuntea. On hyvin harvinaista, että selkeä objekti voi ilmentyä sekä prosessina ja käsitteenä tai muistissa olevana asiana tai visuaalisena merkkinä tai puhuttuna sanana. (Pitta-Pantazi, Gray & Christou 2002, 65.)

Jordanin (2007) mukaan on mahdollista jo päiväkoti-iässä sekä ensimmäisellä luokalla testata ja löytää ne lapset, joilla on riski oppimisvaikeuksiin matematiikassa. Tällaiset lapset tarvitsevat varhaista interventiota, jolla heidän oppimisvaikeuksiaan voidaan ehkäistä. Kuitenkin maatematiikan osalta tapahtuvat interventiot ovat paljon harvinaisempia pienillä lapsilla kuin lukemaan oppimisen interventiot. (Jordan 2007.)

Lasten matemaattisten taidon kehitystä koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla mittaavassa suomalaisessa tutkimuksessa (Kinnunen, Lehtinen & Vauras 1994) todettiin, että koulutulokkailla olivat matemaattisloogiset osataidot keskimäärin hallinnassa. Näitä osataitoja olivat joukkojen vertailu, transitiivinen päättely ja lukumäärän säilyvyyden ymmärtäminen. Myöhempää aritmetiikan hallintaa ennustavaksi tekijäksi nousi lukujonotaitojen hallinta. Ensimmäisen kouluvuoden aikana lukujonotaidot myös kehittyivät voimakkaasti. Yhteen- ja vähennyslasku hallittiin hyvin lukualueella 0–20, mutta 20:n ylittävällä lukualueella osalla lapsista oli vielä vaikeuksia. (Kinnunen, Lehtinen & Vauras 1994.)

4.8 Koonti yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden kehittymisestä

Pohjana yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden kehittymiselle voidaan pitää Vygotskyn (1978) teoriaa lähikehitysvyöhykkeestä. Sen Vygotsky (1978, 88) määritteli välimatkaksi jo hallitusta ongelmanratkaisutaidosta siihen potentiaaliseen ongelmanratkaisutaitoon, joka on mahdollista saavuttaa aikuisen ohjauksessa tai vaikkapa luokkatovereiden avustuksella. Tämän pohjalta Galperin kehitti tämän kehityksen opetuksellisia lähtökohtia.

Hänen mukaansa uuden oppimisessa on keskeistä, että orientaatiovaiheessa hankitaan ennakkokäsitykset ja valmiudet tulevaan toimintaan (Haenen 2001; Koskinen 2005). Seuraavaksi uutta opittavaa asiaa harjoitellaan konkreettisen materiaalin avulla. Edelleen toimintoa harjoitetaan puhutun kielen avulla, josta se siirtyy sisäisen puheen tasolle. Lopuksi toiminto sisäistetään ja se myös lyhenee. (Galperin 1957.) Opetus-oppimisprosessi siis lähtee liikkeelle orientaatiovaiheesta, jota pitäisi seurata *konkreettisen ulkoisen materiaalin* käyttö. Sen pois jättäminen vaarantaa koko oppimisprosessin.

Yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden kehitys alkaa lukusanojen luettelemisen opettelusta ja siitä, että tämä luetteleminen osataan liittää konkreettisiin esineisiin. Yhteen- ja vähennyslaskun kehittymisessä on Piaget'n (1952), Carpenterin ja Moserin (1982) ja Fusonin (1992) mukaisesti erotettavissa kolme eri tasoa. Niistä ensimmäisellä tasolla lapset liittävät luvut ja niillä laskemisen konkreettisiin esineisiin. Sitä on edeltänyt vaihe, jolloin lukujen ja esineiden yksi-yhteen vastaavuuskaan ei aina ole selvä. Mutta vähitellen esineiden avulla laskettaessa tämä yhteys käy ilmeiseksi. Samalla esinejoukko voi kuvata vain yhteenlaskettavaa tai summaa, mutta myöhemmin esinejoukko voi myös kuvata vain osaa summasta.

Yhteen- ja vähennyslaskun kehittymisen toisella tasolla kaikki laskutapahtuman kolme eri lukua voidaan kuvata simultaanisesti yhdellä lukujonolla. Laskeminen voi myös alkaa suoraan toisesta yhteenlaskettavasta. Lukusanoja ei myöskään käytetä pelkästään lukuja kuvaavan esinejoukon laskemiseen, vaan lukusanat itsessään edustavat yhteen- ja vähennyslaskun lukuja. Konkreettiset esinemallit eivät ole enää välttämättömiä vaan laskeminen tapahtuu lukusanoja luettelemalla samalla kun jollakin toissijaisella laskemisella tarkataan, että lukujonossa edetään haluttu määrä eteen- tai taaksepäin (double counting). Laskemisessa voivat olla esim. sormet apuna. Laskeminen nopeutuu ja lukujonossa voidaan siirtyä muutenkin kuin yhden välein, esimerkiksi laskemalla kahden välein tai vaikkapa viiden välein.

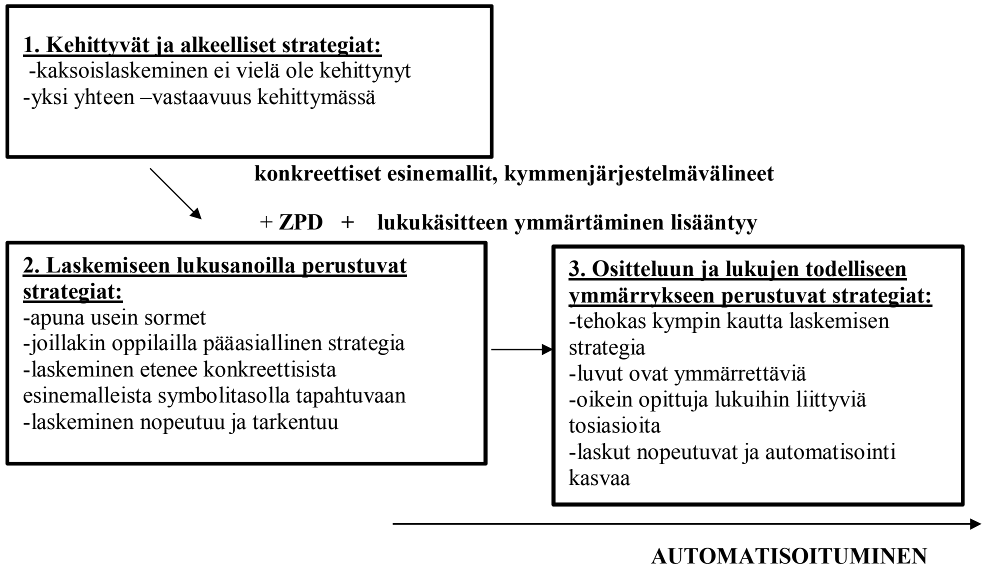
Kolmannella tasolla yhteen- ja vähennyslaskun luvut ymmärretään omina itsenään sekä ekvivalenssisuhteessa summaan tai erotukseen. Lukuja osataan ositella ja avuksi tulevat jo opitut lukuihin liitettävät tosiasiat, sellaiset kuin tuplasummat (6+6=12, 7+7=14,…) tai kymppiparit (6+4=10, 7+3=10,...). Vastausta ei aina tarvitse erikseen laskea vaan se on lähinnä todennettavissa, esimerkiksi 7+5=7+3+2 =10+2=15. Tälläkin tasolla pätee se, että vähennyslaskuun johdetut laskusäännöt ovat vaikeampia kuin yhteenlaskuun liitetyt. (Fuson 1992.) Monet laskuista tulevat niin tutuiksi, että ne automatisoituvat. Tällä tasolla laskevilla on myös hyvä ymmärrys luvuista ja kymmenjärjestelmästä.

Pohjanaan Vygotskyn lähikehitysvyöhyke, jota Tharp ja Gallimore (1988) olivat kehittäneet Murata ja Fuson (2006) loivat oman tarkennetun mallin lähikehityksen vyöhykkeestä. He laajensivat mallia koskemaan 'Matemaattista osaamista'. Heidän 'ZPD Mathematical Profiency Model' edellyttää opetuksellisia keskusteluja, jotka auttavat oppilaan ymmärryksen kehittymistä sekä harjoitusta, jolla kehitetään suorituksen sujuvuutta. (Murata & Fuson 2006, 421.) Samalla he määrittelivät käsitteen 'luokan oppimispolku', joka heidän mukaansa koostuu pienestä määrästä erilaisia 'oppilaiden oppimispolkuja'. Tämä puolestaan antaa opettajalle mahdollisuuden avustaa oppilaita juuri heidän tasonsa mukaisesti.

Oppilaat etenevät siis yhteen- ja vähennyslaskun oppimisessa omaa yksilöllistä oppimispolkuaan. Usein oppilaiden oppimispolut kuitenkin muistuttavat toisiaan. Joillekin oppilaille on helpompaa siirtyä ositteluun perustuvien strategioiden käyttöön. Toiset oppilaat voivat jäädä melko pitkään lukusanojen luettelemiseen perustuvan laskustrategian käyttäjiksi. Se voi hidastaa heidän selviytymistään monimutkaisemmissa tehtävissä. (Cumming & Elkins 1999.)

Samaan aikaan yhteen- ja vähennyslaskun kehittymisen kanssa oppilaan ymmärrys kokonaisluvuista ja kymmenjärjestelmästä kasvaa. Hiebertin ja Carpenterin (1992) mukaan aina kun esitämme jotakin matemaattista käsitettä, on se esitettävä puheen, kirjoitettujen symboleiden, kuvan tai vaikkapa fyysisten esineiden avulla. Yksi matemaattinen ajatus (idea) voidaan esitellä yhdellä tai vaikkapa kaikilla edellä mainituilla esitystavoilla. Hiebert ja Carpenter tekevät sen johtopäätöksen, että näillä sisäisillä ja ulkoisilla esitystavoilla on keskinäinen riippuvuussuhde. Esimerkiksi 10-järjestelmävälineillä, tuhatkuutioilla, satalevyillä, 10-sauvoilla ja ykköspalikoilla, voidaan oppilaan ymmärrystä useampinumeroisista luvuista ja kymmenjärjestelmästä lisätä. Samalla oppilaan sisäiset ymmärryksen verkot kasvavat. Tätä ymmärryksen kasvua tarvitaan nimenomaan vielä siinä vaiheessa, kun siirrytään käyttämään ositteluun perustuvia laskustrategioita. Siis fyysiset ja konkreettiset mallit ovat mukana kaiken aikaa yhteen- ja vähennyslaskun kehityksessä.

Kuviossa 8 on esitetty kootusti erilaisia laskustrategioita ja siirtymää puutteellisista strategioista lukusanojen luettelemiseen perustuviin strategioihin ja edelleen kohti ositteluun perustuvia laskustrategioita. Tämä kaikki siirtyminen tapahtuu oppilaan lähikehitysvyöhykkeellä samanaikaisesti, kun hänen sisäiset ymmärryksen verkkonsa kasvavat. Luokkaan pitää varata tarpeelliset konkreettiset välineet. Opetustilanteissa niitä pitää myös rohkaista käyttämään. Samoin oppilasta on rohkaistava selittämään ja kertomaan, millaisia strategioita hän laskiessaan käyttää. Kokemus on osoittanut, että yleensä kaikilla koulunsa aloittavilla oppilailla on kova halu oppia yhteen- ja vähennyslaskuja. Se myös onnistuu, kun he saavat tarvitsemansa avun ja tuen.



Kuvio 8. Laskustrategioiden kehittyminen.

5 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa esitellään aluksi tutkimusasetelma ja tutkimusongelmat. Sen jälkeen kerrotaan konkreettisen materiaalin käytöstä tutkimusluokassa tutkimusvuoden aikana. Kerrotaan myös Opettaja oman työnsä -tutkijana liikkeestä. Loppuosassa lukua keskitytään selvittämään *fenomenografista* tutkimusta; sitä, mistä siinä on kysymys ja miten se toteutetaan.

5.1 Tutkimusasetelma ja tutkimusongelmat

Tutkimuskohteeni oli oma yhdistetty 1–2 luokkani, jossa oli 6 ensimmäisen luokan oppilasta ja 11 toisen luokan oppilasta. Koulu oli alle 100:n oppilaan eteläsuomalainen kaupunkikoulu. Oppilaiden lukukäsitettä ja laskustrategioita tutkin videoidulla haastatteluilla kolme kertaa lukuvuoden 2003–2004 aikana. Ensimmäinen haastattelu oli syyskuun puolivälissä, seuraava tammikuun puolivälissä ja kolmas toukokuussa. Toisen luokan oppilailla oli edellisenä lukuvuonna ollut toinen opettaja, joten koko yhdysluokka 1–2 oli minulle uusi luokka.

Tutkimuksen mittari:

Haastattelussa lukukäsitettä ja sen osaamista mitattiin mm. lukujonojen luettelulla etu- ja takaperin, samoin kuin parillisten ja parittomien lukujen luettelemisella. Tutkittiin siis oppilaan lukujonotaitoja. Tehtävätyyppinä oli myös etsiä lukuja ”yksi pienempi kuin x, yksi suurempi kuin x, kaksi pienempi kuin x ja kaksi suurempi kuin x”. Ajattelin, että edellä esitetyt tehtävät kertoisivat oppilaan lukujonotaidoista. Laskustrategioita taas testasin antamalla oppilaan ratkaista yhteen- tai vähennyslaskun ja sen jälkeen selostaa, jos mahdollista, ääneen ajattelemalla, miten tehtävän ratkaisi. Tehtävät sijoittuivat 1. luokalla lukualueelle 0–20. Valitsin mukaan aivan helppojakin tehtäviä, jotta näkisin, miten ensimmäisen luokan oppilaat syksyn mittauksessa hallitsevat niitä. Tällaisia laskuja olivat laskut 2+2, 4+3, 4-4 ja 10-1. Valitsin mukaan laskuja, joissa testattiin tuplasummien osaamista (8+8 ja 7+7) sekä laskuja, joissa tuli mukaan kymmenylitys (9+6, 12-5, 15-7). Lisäksi valitsin vielä laskuja, joissa vaadittiin lukujen ymmärtämistä (20-15, 20-19). Lisäksi oli vielä kaksi sanallista tehtävää. (Ks. liite 1.)

Toisen luokan oppilaat tekivät samat tehtävät kuin ensimmäisen luokan oppilaatkin, mutta lisäksi tehtävät laajenivat lukualueelle 0–100. Mukaan tuli sellaisia tehtäviä kuin 47+6, 82-4 ja 55-9. Lisäksi mukaan tuli kaksinumeroisia lukuja sisältävät tehtävät 32+10, 15+15 ja 75-20. Lisäksi oli vielä kolme sanallista tehtävää lisää. (Ks. liite 1.)

Haastattelussa kartoitin myös oppilaiden asennetta ja innokkuutta matematiikan opiskelua kohtaan. Toukokuun mittauksessa 1. luokkalaiset tekivät koko testin, siis saman kuin 2. luokkalaiset. Mittaria oli esitestattu edellisenä keväänä esikoulussa teettämällä joitakin lukujonotehtäviä samoin kuin laskujen selittämistä. Vuoden kuluttua toukokuun testistä haastattelin vielä kolmea ensimmäisen luokan oppilasta ja neljää toisen luokan oppilasta, jotka nyt siis olivat toisella ja kolmannella luokalla. Tällöin mukaan tuli sellaisia avoimia tehtäviä kuin11+_=30, 22+_=40 ja 75+_=100. (Ks. liite 2.)

Tutkimusongelmat:

Lähtökohtani oli tutkia kuinka hyvin alkuopetuksen matematiikassa onnistutaan lukukäsitteen ja laskustrategioiden kehittämisessä ja siksi muotoilin seuraavat **tutkimusongelmat:**

1. **Millaisia laskustrategioita alkuopetuksen oppilailla on?**
2. **Miten oppilaiden laskustrategiat kehittyvät vuoden mittaan?**
3. **Millaisia laskustrategioiden oppimispolkuja luokan sisällä on löydettävissä?**

Samalla oletin, että nämä laskustrategiat kertovat myös oppilaan lukukäsitteestä ja sen kehittymisestä (Fuson et all. 1997; Hiebert & Wearne 1992). Lisäksi olin kiinnostunut siitä, miten tärkeää konkreettisen materiaalin käyttö on rakennettaessa alkuopetuksen lukukäsitettä ja oppilaan laskustrategioita. Siksi pidin tutkimukseni lähtökohtana sitä ajatusta, että *konkreettisen materiaalin käyttö ja esilläolo on hyvin tarpeellista, jopa välttämätöntä, rakennettaessa oppilaalle hyvää lukukäsitettä ja siihen liittyviä tehokkaita laskustrategioita.*

5.2 Konkreettisen materiaalin käyttö opetuksessani eli ”ajattelun apuvälineet”

Lähtökohtana oli, että pelkkä oppikirja ei riitä alkuopetuksen matematiikassa. Niinpä heti syksyllä jaoin jokaiselle oppilaalle 20 muovista Unifix-palikkaa, jotka olivat oppilaalla aina tarvittaessa käytössä, ja joita jokainen säilytti omassa pulpetissaan. Laitoimme ne itse tehtyyn kankaiseen säilytyspussiin, johon kerättiin myös muuta materiaalia kuten kirjasta leikattuja numerokortteja, nappeja tai itse tehdyt laskuhelmet (20 kahta eri väriä olevaa helmeä, jotka voi ryhmitellä esim. parillisiksi luvuiksi). Teimme myös pahvista lukusuoramalleja.

Alkuvaiheessa, kun syksyllä opiskeltiin ensimmäisiä yhteenlaskuja, pyrimme aina pitämään palikat esillä ja laskemaan niillä. Myös melko varhaisessa vaiheessa ensimmäisellä luokallakin laskimme kymppiin asti ja kymmenylityksiäkin palikoiden avulla. Toisella luokalla kertasimme nimenomaan kymmenylitystä palikoiden avulla. Myöhemmin yritimme löytää yhteyden näillä 20 palikalla laskemisen ja isompien yhteen- ja vähennyslaskujen välillä. Tätä yhteyttä yritimme selvittää myös rakentamalla yhdessä palikoista lukujonon 0–100 Unifix-alustalle, jossa on esillä lukusuora 0–100. Tähän sitten voi palikoilla rakentaa luvun esim. siten, että laittaa kympit erivärisinä jonoina ja sitten vielä ykköset toisen värisinä palikoina. Nyt isonkin yhteen- tai vähennyslaskun voi konkretisoida ja samalla sijoittaa sen mielessään oikeaan kohtaan lukusuoralla 0–100.

Opetus eteni siinä mielessä perinteisesti, että tunnilla kävimme yleensä yhden kirjan kappaleen läpi, josta sitten tuli myös kotitehtävät. Koska kyseessä oli yhdysluokka, sai kumpikin luokka vuorollaan tehdä hiljaisia töitä, kun toisen luokan kanssa opiskelimme ja harjoittelimme opeteltavaa asiaa. Tunti saattoi alkaa esimerkiksi siten, että toisen luokan oppilaat tarkastivat pareittain kotitehtävänsä. Samaan aikaan harjoittelimme ensimmäisen luokan kanssa vaikkapa kymmenylitystä Unifix-palikoiden avulla, jonka jälkeen oppilaat alkoivat tehdä kirjan tehtäviä hiljaisena työskentelynä. Tällöin minulla oli aikaa opettaa toisen luokan oppilaille kaksinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskua piirtoheittimellä tai taululla demonstroiden. Tässä yhteydessä jotkut ensimmäisen luokan oppilaat saattoivat seurata opetusta, ja joukossa oli oppilaita, jotka osasivat laskea myös nämä toisen luokan esimerkkitehtävät. He oppivat siis samalla paljon vaativampia tehtäviä kuin heillä omassa oppikirjassaan oli.

Kymmenylityksen harjoittelussa ensimmäisen luokan kanssa meillä oli siis apuna Unifix-palikat. Tällöin esim. laskussa 7+5 katsoimme, että 7:n tarvitsee 3 palikkaa lisää täydentyäkseen 10:ksi. Sen jälkeen huomataan, että 5:stä jää jäljelle 2. Tällöin huomataan, että lasku 7+5 on laskettavissa 7+3+2=12. Lasku lasketaan siis 'kympin kautta', kuten käyttämämme sanonta luokassa kuului.

1.luokka

- kotitehtävien tarkistus opettajan johdolla
- kymmenylityksen harjoittelua Unifix-palikoiden avulla pareittain
- oppikirjan tehtävät
- lisätehtävät
- päässälaskuja

2.luokka

- kotitehtävien tarkistus pareittain
- kaksinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskuja, opettajan demonstraatio taululla ja piirtoheittimellä
- oppikirjan tehtävät
- lisätehtävät

Unkarilaisten värisauvojen avulla harjoittelimme rakentamaan yhtä suuria lukuja erivärisistä ja siten eripituisista palikoista. Esimerkiksi luvun 9 voi katsoa rakentuvan kolmesta yhtä pitkästä palikasta eli kolmosista, jotka yhdessä muodostavat samanpituisen sauvan kuin 9 oli. Tämänkaltainen rakentelu kehittää myös loogista päättelyä. Näitä palikoita emme kuitenkaan käyttäneet mitenkään säännöllisesti vaan vain silloin tällöin.

Montessorin pankkipelin avulla kevätpuolella toisen luokan oppilaiden kanssa konkretisoimme kolminumeroisia lukuja, sekä niiden yhteenlaskua. Näitä palikoita, kymppisauvoja, satalevyjä ja tuhatkuutioita käytimme myös tukiopetuksessa. Tämän materiaalin avulla voi konkretisoida esim. sitä, että allekkainlaskussa vaikkapa ykkösten ylittäessä kymmenen, täysi kymppi siirtyy kymmenten sarakkeeseen. Sama ilmiö on todennettavissa kymppien sarakkeessa sekä satojen sarakkeessa.

Hyvin paljon käytin opetuksessani piirtoheittimelle sijoitettavia läpinäkyviä ykköspalikoita, kymppisauvoja ja satalevyjä. Jonkin verran, joskin vähemmin käytimme helmitauluja. Rohkaisin myös laskemaan esim. kynien avulla. Myös sormia sai käyttää apuna laskemisessa. Samoin rohkaisin esimerkiksi koepaperiin piirtämään kuvioita sanallisista tehtävistä.

Matematiikan tunneilla, etenkin jos ne olivat iltapäivän puolella, oppilaat saivat pelata usein pareittain tai kolmittain jotain laskemiseen liittyvää peliä. Näitä pelejä oli kiitettävän paljon käyttämässämme kirjasarjan opettajanoppaassa ja monissa niissä tarvittiin noppaa. Ylipäätään etenimme opetuksessa suurin piirtein kirjan mukaan, mutta aluksi varsin hitaasti ja myöhemmin jos asia hallittiin, paljon vauhdikkaammin, ei siis mitenkään kaavamaisesti. Opetus oli aika usein opettajajohtoista opetusta, mutta joskus sentään yhteisöllistä, kuten edellä kerrotuissa pelitilanteissa. Oppilaat ratkoivat joskus myös pareittain ongelmatehtäviä. Niitä olivat esimerkiksi ensimmäisen luokan syksyllä yhteen- ja vähennyslaskut, joissa oli kymmenylitys, palikoiden avulla ratkaistuna. Toisen luokan osalta oppilaat saivat esittää ratkaisujaan taululla ja näitä ratkaisuja muut sitten kommentoivat. Käytössä oli myös kaikilla oppilailla lisätehtäväkirja, ei kuitenkaan kaikilla heti alkuvuodesta. Käytössämme oli Laskutaidon uusittu kirjasarja.

5.3 Opettaja oman työnsä tutkijana

Tutkimukseni kohteena oli siis oma luokkani ja oppilaat, joiden opettajana toimin. Tämä asetelma vastaa Opettaja oman työnsä tutkijana -liikkeen tutkimusasetelmaa. Tämä kansainvälinen Opettaja työnsä tutkijana/Teacher as Researcher -liike rantautui Korpisen (1996) mukaan Suomeen 1990-luvun alussa. Myös kansainvälisissä opettajankoulutusta koskevassa kirjallisuudessa ja konferenssiteemoissa ”opettaja tutkijana” -teema alkoi toistua yhä laajemmin 1990-luvulla (Niemi 1993, 52).

”Opettaja työnsä tutkijana” -liikkeen nousu liittyy Niemen (1993) mukaan opettajan ammatilliseen kehittymiseen ja reflektiivisyyden korostamiseen. Omakohtainen tutkimustyö nähdään välineenä sille, että opettaja oppii tarkastelemaan omaa työtään kriittisesti ja reflektoiden. Reflektio on opettajan ammatillisen kasvun pääelementti (Ojanen 1996, 51). Tutkivaa opettajaa käsittelevässä kirjallisuudessa reflektiota kuvataan välineeksi, jonka avulla opettaja voi astua askeleen kauemmaksi arkirutiineista. Se on keino päästä syvempään ymmärrykseen opetustapahtumasta.

Opettaja työnsä tutkijana -tutkimukset ovat usein käytännönläheisiä *toimintatutkimuksia*. Leino (1996) toteaakin, että tutkimus ja käytäntö ovat toistensa ehtoja nykyaikaisessa kasvatuksessa. Tutkimus voi olla prosessipainotteista, jolloin tutkitaan erityisesti opetustoimenpiteiden vaikutusta oppilaisiin. Tällöin tutkimuksen tarkoitus voi olla löytää tietyn tavoitteen toteuttamiseksi tehokkaita toimintatapoja. Mutta toimintatutkimuksen tavoite voi olla myös laaja-alaisempi. Silloin toiminnan kehittäminen nähdään koko yhteisön asiana. (Leino 1996, 82–83; Kemmis 2006.)

Tässä tutkimuksessa tutkin oppilaiden erilaisia laskustrategioita. Tutkimus sisältää toimintatutkimuksen piirteitä. Laskustrategioiden kehittymiseen pyrin mm. opetusmenetelmillä, johon sisältyy konkreettisen materiaalin esilläolo matematiikan tunneilla. Tutkimusaineiston keräsin kuitenkin systemaattisilla oppilaiden haastatteluilla, jotka toteutettiin syyskuussa, tammikuussa ja toukokuussa. Niiden analysoinnissa päädyin käyttämään fenomenografista tutkimusotetta.

Laskustrategioiden kehittymisessä voi kyllä nähdä opetuksen ja oppimisen yhteisöllisen puolen. Oppilaat voivat oppia laskustrategioita myös toisiltaan tai vaikkapa kodissa isän tai äidin opastuksella.

5.4 Fenomenografinen tutkimussuuntaus

Fenomenografia on tutkimusmenetelmä, joka kehitettiin Göteborgin yliopistossa 1970-luvulla kasvatustieteellisiä tutkimuksia tekevien tutkijoiden keskuudessa. Lähtökohtana tutkimuksissaan heillä oli eräs yksinkertaisimmista havainnoista, joka voidaan oppimisesta tehdä, nimittäin havainto, että jotkut ovat parempia oppimaan kuin toiset. Tämä itsestään selvä huomio johti kysymykseen:

1. Mitä se *tarkoittaa*, että jotkut ovat parempia oppimaan kuin toiset?
2. *Miksi* toiset ovat parempia oppimaan kuin toiset?

(Marton 1994.)

Opiskelijoiden oppimista tutkittiin heidän opiskeluympäristössään. Tutkimus toteutettiin haastattelijan ja opiskelijan yhteisissä istunnoissa, joissa opiskelijalle annettiin teksti luettavaksi. Jälkeenpäin opiskelija sai selittää haastattelijalle käsitystään luetusta tekstistä. Kaikki haastattelut nauhoitettiin ja translitteroitiin jälkeenpäin. Opiskelijoiden erilaiset käsitykset kuvattiin mahdollisimman tarkasti, erityisesti erot muiden käsityksiin, niin että voitiin muodostaa kuvauksista kategorioita. Nämä kategoriat puolestaan muodostivat hierarkkisen järjestelmän, joka kuvasi opiskelijoiden käsityksiä (ns. outcome space). Tätä järkeilyä voitiin tietenkin soveltaa muihinkin tutkittaviin aiheisiin kuin tekstin ymmärtämiseen.

Ensimmäisten fenomenografisten tutkimusten kohde oli siis erilaiset käsitykset jostakin erityisestä aiheesta; käsitykset joita opiskelijat kehittivät tietyissä tilanteissa. Tutkittiin eroja opiskelijoiden lähestymistavoissa, eroja heidän tavassaan kokea tietyt opiskelutilanteet. Painopiste tutkimuksessa oli tutkia laadullisia eroja opiskelijoiden oppimisessa. (Booth1992, 46.) Toinen vaihe fenomenografisessa tutkimuksessa oli siirtää painopiste siitä, mitä tapahtuu tietyssä tilanteessa siihen, mitä käsityksiä opiskelijat omaavat ennakolta tietystä ilmiöstä, jota halutaan tutkia. Esimerkiksi se, miten lapset ymmärtävät luvut, on tärkeää, kun aletaan tutkia heidän ymmärrystään aritmeettisista ongelmista. (Neuman 1987; Marton&Neuman 1989.)

Yhdistävä piirre kaikissa fenomenografisissa tutkimuksissa oli seuraava: mitä tahansa ilmiötä tutkittiinkaan, oli löydettävissä rajallinen määrä laadullisesti erilaisia ja toisiinsa loogisesti liittyviä tapoja, joilla ilmiö tai tilanne koettiin tai ymmärrettiin. Lisäksi myöhemmissä tutkimuksissa havaittiin, että tätä periaatetta voitiin soveltaa myös kasvatustieteen ulkopuolelle sijoittuviin tutkimuksiin. (Booth 1992.)

Fenomenografia on empiirinen tutkimusmenetelmä, jonka avulla selvitetään erilaisia tapoja, joilla ihmiset kokevat, omaksuvat, käsittävät, ymmärtävät tai käsitteellistävät erilaisia ilmiöitä ympäröivässä maailmassamme. (*experience, perceive, apprehend, understand, conceptualise*) Sanoja kokevat, omaksuvat jne. käytetään vaihtoehtoisina.

Marton (1994) pohtii, mikä sitten on käsitys jostakin (conception)- tai vaihtoehtoisesti tapa kokea jotakin, ja päätyy siihen, että se ei ole kognitiivinen rakenne. Sen sijaan se on tapa olla tietoinen jostakin. Esimerkiksi lapsi voi kokea luvun 7 siten, että hän katsoo toisen käden 5 sormea ja sitten lisää siihen 2 sormea, tai hän voi ymmärtää sen vaikkapa 6+1 tai 4+3. Kaikissa näissä tapauksissa 7 on kuitenkin kahden luvun summa. Tietoisuus on suhde subjektin ja objektin välillä. Lisäksi kun jokin on huomion kohteena, se on aina sitä jonkun näkemänä, ajattelemana tai muuten kokemana. Yksinkertaisesti emme voi käsitellä mitään kohdetta ilman, että kokisimme tai muodostaisimme käsityksen siitä jollakin tavalla. Subjekti ja objekti ovat aina suhteessa toisiinsa. Siksi ilmiön kokeminen tai ymmärtäminen kertoo aina jotakin paitsi ilmiöstä myös sen kokijasta tai ymmärtäjästä. (Marton 1994.)

Erilaiset tavat kokea ilmiö kuvattuna erilaisilla toisiinsa liittyvillä kategorioilla edustavat erilaisia tämän ilmiön ymmärryksen tasoja. Näistä tavoista toiset ovat tehokkaampia kuin toiset. Esimerkkinä yhteenlasku 2+7 voidaan laskea tehokkaammin käyttäen apuna vaihdannaisuutta ja laskea lasku muodossa 7+2. Se, että näkee heti, että 2 ja 7 ovat luvun 9 osia ilman, että järjestys vaikuttaa mitenkään, on eräs tehokas tapa ymmärtää lukujen suhteita ja kertoo aritmeettisten taitojen kehittymisestä. (Marton 1994; Marton & Booth 1997.)

Tietty tapa ymmärtää jotakin on siis tapa olla tietoinen siitä jostakin. Se on myös sidottu aikaan ja paikkaan. Me emme ole tietoisia kaikesta samalla tavalla, vaan jokaisella tilanteella on oma relevantti rakenteensa. Fenomenografiassa tutkitaan juuri erilaisia tapoja, joilla olemme tietoisia tietystä ilmiöstä tai tapahtumasta. Halutaan löytää eroja tietoisuuden rakenteissa ja ilmiön tai tilanteen toisiinsa liittyvissä merkityksissä. (Marton 1994; Marton & Booth 1997.)

Häkkisen (1996) mukaan fenomenografisessa tutkimuksessa tehdään ero sen välille, miten asiat ovat ja miten niiden oletetaan olevan. Näitä kuvaamaan on otettu käsitteet ”ensimmäisen asteen näkökulma ja toisen asteen näkökulma”. Kun ensimmäisen asteen näkökulma voi olla käytössä esimerkiksi jossakin luonnonilmiön tutkimuksessa, jossa yritetään kuvata todellisuutta sellaisena kuin se on, fenomenografisessa tutkimuksessa on käytössä toisen asteen näkökulma, jolloin ilmiön pysyessä samana yksilöiden käsitykset siitä vaihtelevat.

Boothin (1992) mukaan fenomenografinen tutkija tutkii sitä, miten ihmiset käsitteellistävät ilmiön, josta ollaan kiinnostuneita. Olennaista on se, että tutkija kuvailee laadullisesti erilaisia käsityksiä ilmiöstä ennemminkin kuin, että hän kuvailisi erilaista käsitteellistämisen kirjoa. Voisi olettaa, että jokaisella tutkittavalla yksilöllä olisi omat ainutlaatuiset käsitykset, mutta kokemus on osoittanut, että on aina olemassa kuvauksen taso, jolla voidaan luoda pieni määrä kategorioita, jotka eroavat selvästi toisistaan. On kuitenkin välttämätöntä tai jopa toivottavaa, että kategorian sisällä voidaan osoittaa eroja käsitysten välillä. Huuskon ja Paloniemen (2006, 169) mukaan kategoriat eivät edusta suoraan yksittäisen ihmisen ajattelua, vaan ne kuvaavat erilaisia ajattelutapoja yleisesti.

Edelleen Booth (1992) pohtii, millä tasolla fenomenografisen tutkimuksen tulokset ovat luotettavia, ja sitä, voidaanko kuvauskategoriat yleistää koskemaan koko yhteiskuntaa. Hänen mukaansa vastaus piilee siinä, miten hyvin ne ovat sopusoinnussa keskeisen tutkimusongelman kanssa. Jos kyseessä on esimerkiksi didaktinen tutkimus, joka johtaa opetuskäytäntöjen muutokseen, silloin tämä hankittu tieto muutoksesta on keskeinen osa tutkimusta (Booth 1992, 56).

Tässä tutkimuksessa on tarkoitus löytää erilaisia oppilaiden käytössä olevia yhteen- ja vähennyslaskun laskustrategioita. Näistä strategioista sitten muodostetaan erilaisia laskustrategioiden kategorioita, jotka ilmaisevat siis oppilaiden erilaisia tapoja laskea. Näiden kategorioiden sisältä sitten etsitään oppilaiden erilaisia oppimispolkuja yhteen- ja vähennyslaskun omaksumiseen.

5.5 Fenomenografisen tutkimuksen metodit

Fenomenografisessa tutkimuksessa teoria on osa tutkimusprosessia. Sitä ei kuitenkaan käytetä käsitysten luokitteluun ennakolta. Fenomenografinen teoria on aineistopohjainen teoria, jossa tutkija luo oman teoriansa aineiston tulkinnan pohjalta. Se syntyy vähitellen vuorovaikutuksessa aineiston kanssa. (Ahonen1994, 123.) Tarkastellaan seuraavaksi aineiston keruuta.

5.5.1 Aineiston keruu

Pääasiallinen aineiston keruutapa on henkilökohtaisen haastattelu. Se, miten jokin ilmiö on koettu, voidaan ilmaista tietenkin monella tavalla. Se, miten henkilö käyttäytyy, kertoo, miten ilmiö näyttäytyy hänelle. Lisäksi on monia fenomenografisia tutkimuksia, joissa tietoa on kerätty ryhmähaastatteluilla, havainnoinnilla, piirroksia tai kirjoituksia analysoimalla tai vaikkapa historiallisia dokumentteja tutkimalla. Kollektiivisella tasolla voimme myös tutkia taide-esineitä, vaikkapa tutkien, mitä erilaisia käsityksiä noihin taide-esineisiin liitämme (Marton, 1984).

Huolimatta erilaisista mahdollisuuksista kerätä aineistoa suosituin tapa on siis henkilökohtainen haastattelu. Mitä enemmän saamme tietoa asioista, jotka liittyvät tutkimuskohteidemme käyttäytymiseen sekä implisiittisesti että eksplisiittisesti, sitä paremmin voimme tutkia tietoisuutta.

Martonin (1994) mukaan fenomenografinen tutkimustehtävä keskittyy haastattelun kohteena olevaan henkilöön. Se on empiirinen tutkimus, jossa tutkija ei tutki omaa vaan haastateltavansa tietoisuutta tutkittavasta ilmiöstä. Haastattelu käydään dialogina, ja haastattelussa siis myös tutkija voi vaikuttaa siihen, mitä teemoja otetaan esille. Haastattelussa esille tulevat seikat ovat muutoksia yksilön tietoisuudessa, muutoksia, jotka haastattelu tuo esille. Tämän tyyppisessä haastattelussa ei kysymysten pidä olla liian muotoiltuja etukäteen. Lisäkysymykset seuraavat siitä, mitä haastateltava sanoo. Kuitenkin Neumanin (1987) aritmeettisia taitoja mittaavassa tutkimuksessa haastattelun lähtökohtana olivat matemaattiset tehtävät, jotka myös analysointivaiheessa otettiin kaikki mukaan.

Fenomenografinen haastattelu edellyttää haastattelijan ja haastateltavan välistä intersubjektiivista luottamusta (Ahonen 1994, 136). Haastattelijan pitää aktiivisesti kuunnella haastateltavaa ja esittää lisäkysymyksiä. Fenomenografia edellyttää syvähaastattelua, jotta kysymysten ja vastausten avulla edetään kulloisenkin teeman ääri- ja syvyysalueille. Näin juuri saadaan laadullista tietoa. Tässä tutkimuksessa luottamusta haastattelutilanteessa edesauttoi se, että toimin myös haastateltavieni opettajana ja tunsimme siten toisemme hyvin.

5.5.2 Tulosten analysointi fenomenografisessa tutkimuksessa

Kuten edellä osoitettiin haastatteluissa osallistujat heijastavat käsityksiään tutkittavasta ilmiöstä. Heidän oletetaan tällöin omaksuvan samantapaisen asenteen kuin on fenomenologista tutkimusta tekevillä tutkijoilla. Kun haastattelut on translitteroitu ja analyysi alkanut, on tutkija se, joka toteaa, toteutuivatko ennakko-odotukset. Sen sijaan, että hän arvioisi, mitä vastaukset kertovat tutkittavan ilmiön ymmärtämisestä, hänen tulee keskittyä niihin yhtäläisyyksiin ja eroihin, joissa ilmiö näyttäytyy osallistujille.

Koska sama osallistuja voi ilmentää erilaisia tapoja ymmärtää ilmiö, yksilö ei ole analyysin kohde vaan hänen esittämänsä näkökulmat. Eri osallistujien litteroidut haastattelut yhdessä muodostavat jakamattoman ja usein haastavan aineiston, jota analysoidaan. Ensimmäinen tehtävä on poimia aineistosta tutkittavan ilmiön ymmärtämisen kannalta relevantit kohdat. Sellainen luokittelu voi tietenkin muuttua myöhemmin analyysin jatkuessa. Joskus aineisto pitää ryhmitellä uudestaan tätä varten. On olemassa kaksi tapaa, jolla tietty ilmiön ymmärtäminen voi esiintyä aineistossa. Ensimmäinen tapa perustuu samankaltaisuuksiin, joilla tutkittavaa ilmiötä on selitetty. Kahdella ilmauksella voi olla sama merkitys vaikka sanamuodot ovat erilaisia. Toinen tapa perustuu kahden ilmauksen erilaiseen merkitykseen, kahteen eri tapaan ymmärtää ilmiö. Se on vastakkainen ensimmäiselle tavalle. Analyysin tässä vaiheessa muodostetaan ja ryhmitellään eri tavat kokea ja ymmärtää jokin ilmiö. Käytännössä ryhmitellään haastattelujen osat erilaisiin ryhmiin. Voidaksemme tehdä tämän meidän pitää ymmärtää niin syvällisesti kuin mahdollista se, mitä on sanottu tai pikemminkin mitä on tarkoitettu. Meidän pitää ymmärtää tietyt ilmaukset niin suhteessa muiden ilmauksiin kuin suhteessa yksilöön. (Marton 1994.)

Kun relevantit lainaukset on ryhmitelty, kiinnostuksen kohde siirretään lainausten eroista muodostettujen ryhmien eroihin. On määriteltävä, miten kutakin ryhmää kriittisesti kuvaillaan, ja mikä todellakin erottaa ryhmiä. Tässä mielessä luodaan tietty kuvausten kategoria, joka edustaa erilaisia tapoja nähdä tai ymmärtää tutkittava ilmiö. Nämä kategoriat voidaan myös laittaa hierarkkisesti järjestykseen (ns. outcome space).

Erilaiset vaiheet fenomenografisessa analyysissä on tehtävä vuorovaikutteisesti. Jokainen vaihe, joka otetaan vaikuttaa paitsi seuraavaan myös edeltävään vaiheeseen. Analyysissä pitää käydä nämä vaiheet useaan kertaan läpi.

Kuvauksen kategoriat ja niiden muodostama ilmiasu (outcome space) ovat fenomenografisen tutkimuksen päätuloksia. Kun ne on löydetty, niitä voidaan taas soveltaa alkuperäiseen aineistoon. Nyt voidaan katsoa mihin kategoriaan- tai kategorioihin, kukin tutkimukseen osallistunut yksilö kuuluu. Samalla voimme muodostaa kategorioiden frekvenssitaulukot. (Marton 1994; Booth 1992; ks. myös Attorps 2006.) Jokaisella kategorialla voi vielä olla alakategorioita. Kuitenkin nimenomaan ylemmän tason kategoriat muodostavat tutkijan oman selitysmallin tutkittavalle asialle. (Ahonen 1994, 127–128.)

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää alkuopetuksen matematiikassa lukukäsitteen rakentumista ja siihen liittyen yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden kehittymistä. Lähtökohtani on, että lukukäsitteen hyvä hallinta edesauttaa laskustrategioiden kehittymistä. Hyvien laskustrategioiden kehittyminen vaatii hyvää lukujen tuntemusta, ja molempien kehittymisessä on konkreettisten mallien käyttö tarpeellista.

Usein esitetään kysymys, tulisiko toinen tutkija, joka tutkisi samaa aineistoa, samaan lopputulokseen? Kysymys sisältää olettamuksen, että analysointi olisi jonkinlaisen mittauksen tulos, ja että toistetusta mittauksesta pitäisi saada samanlainen tulos. Fenomenografinen analyysi ei kuitenkaan ole mittaamista vaan se on uuden löytämistä. Martonin (1994) mukaan se, että löytää uuden tavan esittää ilmiötä on verrattavissa siihen, että löytää uuden kasvilajin kaukaiselta saarelta. Löydön ei tarvitse olla toistettavissa, mutta kun ilmiön eri kategoriat ja ulkoasu on esitetty, se pitäisi tehdä niin, että muiden tutkijoiden on mahdollista ymmärtää ja arvioida, mihin kategoriaan alkuperäiset tapaukset kulloinkin kuuluvat. Sellaisen arvioinnin jälkeen pitäisi olla asiasta tarpeellinen yksimielisyys kahden riippumattoman tutkijan välillä. Tämä tarpeellinen tai järkevä yksimielisyys on yleensä se, että kaksi tutkijaa päätyvät olemaan samaa mieltä vähintään 2/3 tapauksista. (Marton 1994.) Toisaalta esimerkiksi Huusko & Paloniemi (2006, 170) kyseenalaistavat toisen tutkijan käytön vertaisluokittelijana fenomenografiassa, koska jokainen tutkija luo nimenomaan oman teoriansa.

Seuraavassa käyn läpi esimerkin tulosteni analysoinnista. Esimerkki on erään ensimmäisen luokan oppilaan tapa laskea lasku 4+3:

- *4+3*
- *nyt oli vähän vaikeeta!*
- *no yritä*
- *neljä (tarkastelee kymppisauvaa, josta hitaasti mumisten laskee sormilla neljä)*
- *plus 3*
- *(toistaa) plus 3*
- *niin 4+3, miten laskisit sen?*
- *4*
- *mutta kun siihen lisätään 3*
- *voi, voi, voi!*
- *älä niin sano, vaan yritä laskea*
- *tähän vielä lisätään 3 lisää (näyttää 4. palikkaa ja laskee toisen käden sormella alusta pysähtyen 4. palikan kohdalla, mutta sitten laskee vielä kolme lisää) 1,2,3,4,5,6,7*
- *paljonko se sitten on?*
- *7*

Analysoinnissa päättelen, että ko. oppilas osaa laskea laskun 4+3 vain palikoiden avulla, ei siis muulla tavoin päässä laskien. Lisäksi hänellä on käytössä ns. counting all -strategia, jolloin hän alkaa laskea alusta ensimmäisestä yhteenlaskettavasta (ks. luku 4.3). Oppilas on esimerkki lapsesta, jolla on käytössä puutteelliset strategiat, jolloin hän suoriutuu helposti yhteenlaskuissa vain alle viiden pysyvillä luvuilla, mutta joka palikoiden avulla pystyy laskemaan lukusanojen luettelemiseen perustuvalla strategialla.

Kävin aineiston läpi oppilas kerrallaan analysoiden kaikki tehtävät järjestyksessä. Pyrin laskutehtävissä löytämään käytetyn laskustrategian sekä lisäksi kirjasin ylös, löytyikö ratkaisu helposti vai vaatiko se pidemmän ajan. Lisäksi kirjasin ylös, oliko tehtävän ratkaisu oikein, väärin vai oliko vastaus väärin yhden verran. Tämä viimeksi mainittu kiinnosti siksi, että lukusanoja luettelemalla laskien lasku voi mennä helposti yhdellä väärin. Hyvin pian huomasin, että jouduin translitteroimaan kaikki haastattelut, jolloin yhtä oppilasta kohden tekstiä tuli yli kymmenenkin sivua. Esimerkkejä laskustrategioista tuli esille siis hyvin runsaasti.

Aloitin analysoinnin syyskuun alkumittauksesta, jota seurasi tammikuun tulosten analysointi. Toukokuun mittauksen analysoin vasta, kun laskustrategioiden kategoriat olivat hahmottuneet. Samaan aikaan kategorioiden nimet muotoutuivat. Ne myös tarkentuivat ja yhden kategorian osalta muuttuivatkin myöhemmin. Seuraavassa luvussa esittelen nämä laskustrategioiden kategoriat.

6 Laskustrategioiden kategoriat

Kuten edellisessä luvussa kävi ilmi fenomenografisessa tutkimuksessa tutkijan on lupa ryhmittää vastaukset haluamallaan tavalla eri kategorioihin. Kategoriat hahmottuivat mielessäni, kun olin analysoinut ja luokitellut laskustrategioita. Olin pyrkinyt luokittelemaan selvästi erilaisia laskemisen strategioita ja niin tehdessäni päädyin neljään erilaiseen kategoriaan. Jaottelin laskustrategiat seuraavasti: 1) puutteellinen strategia, 2) lukusanoilla luettelemiseen perustuva strategia, 3) 'oma strategia' ja 4) ositteluun perustuva strategia. Fenomenografiselle tutkimukselle luonteenomaisesti kategoriat hahmottuivat vasta ajan kanssa ja niiden nimet tarkentuivat (ks. Booth 1992). Esimerkiksi kolmannen kategorian 'omat strategiat' olin nimennyt alussa nimellä 'itse opitut strategiat'.

Seuraavassa esittelen neljä eri tulosten kategoriaa. Nimesin ensimmäisen niistä nimellä **'puutteelliset strategiat'** ja sillä tarkoitan kaikkia niitä oppilaan epäonnistuneita yrityksiä suoriutua laskuista, kun hänellä ei vielä ole siihen edellytyksiä. Hänen strategiansa eivät toisin sanoen ole vielä kehittyneet tai ne ovat vaillinaisia. Samoin hänen lukukäsityksensä on vielä heikolla pohjalla ja jopa yksi-yhteen vastaavuus lukujen luettelemisen ja palikkajonon palikoiden välillä voi puuttua. Tarkoitan puutteellisilla strategioilla strategioita, jotka liittyvät laskemisen opettelun alkuvaiheeseen, siis lähinnä koulutulokkaisiin. En tarkoita puutteellisilla strategioilla enää sitä tilannetta, kun vaikkapa toisen luokan oppilas suuremmilla kaksinumeroisilla luvuilla epäonnistuu laskemisessaan.

Toisen kategorian nimesin nimellä **'lukusanojen luettelemiseen perustuvat strategiat'**. Se on hyvin perustavanlaatuinen tapa laskea. Tämän Fuson (1992) sijoitti yhteen- ja vähennyslaskun käsitteen rakenteen toiselle tasolle, tosin se tietenkin alkaa kehittyä jo ensimmäisellä tasolla. Huomattavaa on, että enää ei tarvita välttämättä ulkoisia esineitä (tässä tapauksessa palikoita) kuvaamaan laskua, vaan laskun voi laskea luettelemalla lukusanoja mielessään. Tämä vaatii ns. kaksoislaskemisen kehittymisen (double counting). Luokittelin tähän kategoriaan kuitenkin myös ne laskutapahtumat, joissa oppilas laski laskun palikoita tai vaikkapa sormia apuna käyttäen. Tämä laskutapa nimittäin kehittyy tuosta palikoiden tai sormien laskemisesta.

Kolmannen kategorian nimesin nimellä **'omat strategiat'**. Vaikka kaikki strategiat, joita lapsi käyttää ovat periaatteessa hänen omiaan, halusin tällä nimityksellä kuvata strategioita, jotka jollakin tavalla poikkeavat edellisestä lukusanojen luettelemisstrategiasta ja toisaalta kehittyneemmistä lukujen tehokkaaseen ositteluun perustuvista strategioista. (Ks. Lakka 2007a; Lakka 2007b.) Tällaiset 'omat strategiat' eroavat usein hiukan siitä, miten oppitunnilla tai oppikirjassa on annettu esimerkkejä laskemisesta. (Ks. esim. Rikala et al. 2003a; Rikala et al. 2003b; Rikala et al. 2003c; Rikala et al. 2003d) 'Omat strategiat' ovat esimerkkejä siitä, miten oppilaan strategia kehittyy edellisestä pelkästä lukusanojen luettelemisesta monimutkaisempaan osittelua kohti kehittyvää strategiaa. Kuitenkaan ne eivät ole suuremmilla luvuilla kovin tehokkaita, ja jollain lailla lukusanojen luetteleminen on vielä vahvasti läsnä.

Neljännen kategorian nimesin nimellä **’ositteluun perustuvat strategiat’**. Nämä ovat niitä strategioita, joissa Fuson toteaa laskemisen tapahtuvan mallinsa kolmannella tasolla ja perustuvan tunnettuihin tosiasioihin. Nyt luvut ovat lapselle niin ymmärrettäviä, että niitä ei tarvitse erityisesti laskemalla laskea. Apuna käytetään myös tuplasummia (esim. 6+6=12, 7+7=14 jne.) tai kymppipareja (6+4=10, 7+3=10 jne.) Tähän kategoriaan liitin myös kaikki ne tavat laskea, joissa laskutapahtuma on jo lyhentynyt ja se on lähes automatisoitunut. En kuitenkaan ole niinkään kiinnostunut siitä, milloin joku laskutapahtuma automatisoituu, vaan siitä, että käytössä on kyllin tehokkaat ja toimivat yhteen- ja vähennyslaskustrategiat, jotka johtavat tähän automatisoitumiseen.

Seuraavassa käsitellään edellä mainittuja strategioiden kategorioita tarkemmin ja käydään läpi joitakin niihin liittyviä erityispiirteitä, erityisesti laskuvaikeuksia tai toisaalta niiden hyötyjä.

6.1 Puutteelliset strategiat

Lapsen lukukäsite siis kehittyi lukusanojen luettelemisen myötä siten, että ensin hän vain luettelee lukusanoja peräkkäisenä jonona, mutta oppii sitten liittämään tiettyyn esinejoukkoon viimeksi luetellun lukusanan (esim. Fuson 1992; Carpenter & Moser 1982). Yhteen- ja vähennyslasku on helpointa ymmärtää käyttäen apuna esinejoukkoa. Lasten kyvyt koulun alkaessa vaihtelevat kuitenkin suuresti (Kinnunen, Lehtinen & Vauras 1994; Horne & Livy 2006.). Niinpä osalla ensimmäisen luokan oppilaista oli lähes olemattomat valmiudet suoriutua yhteen- ja vähennyslaskuista. Nekin, jotka osasivat vähän enemmän, olivat heti yli viiden menevillä luvuilla laskettaessa vaikeuksissa. Heillä voi katsoa olevan puutteelliset strategiat yhteen- ja vähennyslaskuun. Näin oli siitä huolimatta, että koulua oli käyty jo noin kuukausi ennen ensimmäistä syyskuun mittausta.

Seuraavassa on esimerkki ’puutteellisista, strategiasta, joka oli käytössä ensimmäisen luokan oppilaalla Tuomolla syyskuun 2003 mittauksessa. Laskussa Tuomo laski ensimmäisen yhteenlaskettavan 10:n palan sauvasta aloittaen ykkösestä. Sitten hän jatkoi laskemista eteenpäin siirtyen ensimmäiseen 10:n palan sauvan jälkeen myös toiseen 10:n palan sauvaan, mutta pysähtyi laskemisessaan lukuun 12. Hän ei siis erottanut kahta 7:n palan sauvaa erilleen.

- *7+7*
- *(laskee palikoista) 1,…,7,, jatkaa 8,9,10,11,12*
- *laskitko 7 lisää, mistä sen tiedät että olet laskenut 7 lisää?*
- *(naurahtaen) en mä tiedä*
- *niin?*
- *mie nyt vaan arvailin, en mie oikein tiiä*

Tässä laskussa oppilaalla ei ole käytössä ns. kaksoislaskemisen strategiaa (double counting). Sen kehittyminenhän oli Fusonin (1992) mukaan edellytys sille, että lapsi voi siirtyä yhteen- ja vähennyslaskun toiselle tasolle (ks. luku 4.3), jossa lasketaan lukusanojen avulla. Laskiessaan 7:stä eteenpäin Tuomon olisi pitänyt osata mielessään pitää lukua siitä, että hän etenee seitsemän lukusanaa eteenpäin. Nyt hän vain arvasi jonkin matkaa lukuja lueteltuaan, että olisi mennyt seitsemän eteenpäin, vaikka tosiasiassa hän oli vasta luetellut viisi lukusanaa eteenpäin.

Toisaalta oppilaalle saattoi yksi-yhteen vastaavuuskin olla kateissa, kuten seuraavat ensimmäisen luokan oppilaan Paavon laskemat esimerkit osoittavat. Laskiessaan Paavo osoittaa palikoita, mutta lukusanojen luetteleminen ja palikoiden osoittaminen kulkevat hieman eri tahtiin.

- *4+3*
- *4+3 (toistaa, ottaa 4 palikkaa ja 3 palikkaa ja yhdistää ne, laskee alusta 1,…,8 on* ***8***
- *onko, no sitten*

- *6+4*
- *6+4 (toistaa)*
- *saat laskea sormilla tai palikoilla tai päässä*
- *(Paavo ottaa 6 palikkaa ja 4 palikkaa) ja laskee 1,2,3,5,6,7,8,9,10,11*
- *kyllä, onko sinulla nyt 4 palikkaa siinä?*
- *(laskee) 1,2,3,4,5, eiku 9 eiku 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 (sai vastauksen 10 vasta 3. kerralla)*

Yhdellä oppilaalla oli jopa käytössä 20:n tilalla käsite ”kymmenentoista”, jolla hän vastasi mm. kysymykseen, mikä luku on yhtä suurempi kuin 19.

Tällaisia puutteellisia strategioita oli neljällä kuudesta ekaluokan oppilaasta syyskuun 2003 mittauksessa. Kuitenkin tammikuun 2004 mittauksessa nämä kaikki oppilaat olivat siirtyneet käyttämään seuraavaa ’lukusanojen luettelemiseen perustuvaa’ laskemisen strategiaa. Tietenkin he oppivat tämän strategian jo syksyn mittaan, kun matematiikkaa oppitunneilla harjoiteltiin. Luonnollisesti he myös osasivat laskea monia laskuja etenkin pienillä alle viiden luvuilla. Palikoiden avulla he osasivat myös laskea isompiakin lukuja sisältäviä laskuja, sellaisia kuin 15-7 tai 8+8.

6.2 Lukusanojen luettelemiseen perustuvat strategiat

Yhteen- ja vähennyslaskun käsitteen rakenteen toisella tasolla Fusonin (1992) mukaan laskutapahtuman kolme eri lukua edustavat sellaisinaan, itse lukusanoina, tarvittavia lukuja. Nyt ei enää tarvita välttämättä ulkoisia esineitä kuvaamaan laskutapahtumaa, vaikka laskeminen aluksi alkaakin näistä konkreettisista esinemalleista. Lisäksi lapsi on kehittänyt ns. toissijaisen laskumenetelmän (double counting) lukujen laskemiseen. Tämä tarkoittaa sitä, että esimerkiksi laskussa 6+4 laskeminen voidaan aloittaa ykkösestä (yksi, kaksi, kolme,…, kuusi, seitsemän, kahdeksan, yhdeksän, kymmenen) pysähtyen kuuden kohdalla ja sitten pitää jollakin tavalla tarkata sitä, että lasketaan neljä lukusanaa eteenpäin. Kehittyneempi tapa laskea lasku 6+4 on aloittaa lukusanojen luetteleminen suoraan luvusta kuusi.

Tälle tasolle siirtyvät yleisesti ottaen varsin nopeasti ensimmäisen luokan oppilaat, mutta tämä taso saattaa olla vallitsevana varsin pitkään myös toisen luokan, joskus ylempienkin luokkien oppilailla.

Seuraavassa on esimerkki lukusanojen luettelemiseen perustuvasta strategiasta. Ensimmäisen luokan oppilas Seppo laski tällä tavalla syyskuun 2003 mittauksessa:

- *12-5*
- *(miettii) 7*
- *miten laskit sen?*
- *no päässä*
- *millä tavalla? Osaatko selittää tarkemmin? Mistä lähdit laskemaan?*
- *tosta 12:sta, aloin vähentää siitä 5*
- *miten tiesit, että olet vähentänyt 5?*
- *sillee kato, kun mie päässä laskin sen sillee 5 vähemmän*
- *tulit 11, 10, ...*
- *niin*
- *mistä tiesit, että olet 5 vähentänyt?*
- *mie laskin sillen niin kun hampailla (nauraen)*
- *laskit vai?*
- *en, en mie tiiä, mie vaan laskin*
- *mutta mistä tiesit, että olet tullut juuri 5 taaksepäin?*
- *ei kun mie vaan menin siitä jonkin verran*
- *ei mutta tiesitkö, että se on 5, laskitko tosiaan hampailla?*
- *(nauraen) en laskennu*

Toinen esimerkki on myös ensimmäisen luokan oppilaan Harrin haastattelusta syyskuussa:

- *6+4*
- *kymppi*
- *osaatko sanoa, miten sen laskit?*
- *en*
- *käytätkö sormia, ajatteletko mielessäsi?*
- *ajattelin*
- *millä tavalla, lähdetkö 1:stä vai lähdetkö 6:sta?*
- *6:sta*
- *ja miten sitten laskit?*
- *6+4 ei kun 6,7,8,9ja 10*
- *pidät mielessäsi, että 4 lasket lisää?*
- *niin*

Myös toisen luokan oppilailla oli käytössä tämä lukusanojen luettelemiseen perustuva strategia kuten seuraava Riinan laskema esimerkki tammikuun 2004 haastattelusta osoittaa. Siinä hän lisäsi kympin lukusanoja luettelemalla.

- *32+10*
- *42*
- *miten laskit?*
- *sormilla*
- *laskitko, miten?*

- *no sillee 32,33,34,35,36,7,38,...*
- *laskit vai?*

Lukusanojen luettelemiseen perustuvat strategiat ovat joillekin oppilaille lähes ainoa tapa laskea. Lisäksi apuna käytetään hyvin usein sormia. Strategiaan liittyy joitakin pulmia, joita käsittelen seuraavaksi.

Lukusanojen luettelemiseen perustuviin strategioihin liittyviä ongelmia

Oppilas, joka turvautuu lukusanojen luettelemiseen perustuvaan strategiaan kohtaa pian ongelmia. Ensinnäkin isommilla luvuilla laskettaessa laskut muuttuvat työläiksi ja tuntuvat lähes ylipääsemättömiltä, kuten seuraava esimerkki 1. luokan oppilaan laskemisesta isommilla luvuilla toukokuun 2004 testissä. Kuitenkin matematiikan tunneilla tämä oppilas oli laskenut vastaavia tehtäviä, joten kyse ei ole puutteellisista strategioista, vaan siitä, että lasku tuntui liian vaikealta sillä hetkellä.

- *82-4*
- *mhyy, tota mie en tiiä*
- *no, osaisit sie laskea?*
- *(yrittää laskea sormilla)*
- *miten kävisit laskemaan sitä?*
- *en tiedä*

Mutta vielä hankalampi pulma on se, että luetellessa vastauksen voi poimia väärin tai luettelemisen voi aloittaa väärästä numerosta. Seuraavassa esimerkkinä ensimmäisen luokan oppilaan lasku syyskuun 2003 mittauksessa, jossa oppilas, joka laskee sormilla poimii kaksi kertaa väärän vastauksen.

- *9+6*
- *(laskee sormilla) 14*
- *miten laskit sen?*
- *9+3 on 12, ni sit siihe lisätään 3 ni se on (tauko)*
- *paljonko se on?*
- *16*
- *joo*

Samanlaisen virheen teki 2. luokan oppilas tammikuussa:

- *12-5*
- *8*
- *miten laskit?*
- *päässä vaan*
- *mutta vähensitkö?*
- *mie vähensin sillee 11,10,9,8*

Kun lasketaan lukusanoja luettelemalla, ei yleensä kiinnitetä huomiota siihen, että on olemassa kaksi eri tapaa laskea. Esimerkiksi edellä olevassa esimerkissä 12-5 voidaan luetteleminen aloittaa luvusta yksitoista ja sitten edetään viisi lukusanaa alaspäin. Siis luetellaan *yksitoista, kymmenen, yhdeksän, kahdeksan, seitsemän,* ja tämän jälkeen poimitaan vastaus *seitsemän*. Mutta lasku voidaan laskea myös niin, että aloitetaan luetteleminen luvusta kaksitoista, jolloin se kuuluu *kaksitoista, yksitoista, kymmenen, yhdeksän, kahdeksan.* Tämän jälkeen pitääkin poimia vastukseksi *seuraava* luku seitsemän.

Opetuksessa koulussa suositaan yleensä ensimmäistä tapaa, mutta toisaalta, jotkut oppilaat käyttävät myös jälkimmäistä. Asiaan ei yleensä edes kiinnitetä huomiota ja väärinkäsityksen vaara on ilmeinen.

6.3 Omat strategiat

Kun opetuksessa ei kiinnitetä kovinkaan paljon huomiota yhteen- ja vähennyslaskustrategioiden opettamiseen, monet oppilaat tuntuvat kehittävän niitä itselleen omin päin. Tällaisia strategioita oli käytössä monilla 2. luokan oppilailla, ja yhteistä niille tuntui olevan se, että laskun ensimmäisestä jäsenestä tehtiin aluksi täysi kymppi. Tätä strategiaa 1. luokan oppilailla esiintyi vain kahdella oppilaalla tammikuun 2004 mittauksessa sekä yhdellä oppilaalla toukokuun 2005 mittauksen siinä osiossa, jossa ekaluokkalaisetkin tekivät koko testin (ks. liite 1, osiot 3 ja 4).

Ensimmäinen yhteenlaskettava kympiksi:

Seuraavanlainen ’oma strategia’ oli käytössä toisen luokan oppilaalla Leenalla syyskuussa 2003:

- *12-5*
- *(miettii) 7*
- *miten laskit sen?*
- *no sillee, että jos tää olisi 10 niin se olisi 5 (osoittaa sormella numeroita), jos se olis 11 niin se olis 6, mutta kun se on 12 ni se on 7*
- *otatko uusiksi, nyt en ihan ymmärtänyt*
- *jos tää olisi 10, tää olisi 5; mutta sit jos tää olisi 11, tää ois 6; mut sit ko tää on 12, sillon tää on tietenkin 7*
- *ahaa, jos 10-5=5, ja 11-5 olisi 6, mutta 12-5=7, hyvä*
- *meiän äiti laski tollee, se opetti mut laskemaan tollee. Se on aika helppoa.*

Saman laskun laski toinen 2. luokan Niina lähes samalla tavalla syyskuun 2003 haastattelussa:

- *12-5*
- *7*
- *miksi?*
- *no, ko mie laitoin 12 kympiks ja otin siitä 5 ja sitten mie laitoin taas niiku 2 enemmäks, 2 enemmän siis taas kun on 12, mie laitoin niiku 10:ksi, et ni laskin 5 ja otetaan 2 vielä*
- *enemmäksi? tämänkö sinä otit pois?*
- *mie laitoin 12 kympiks (sormilla) otin miinus 5, ni mie tiiän, et 12 oli näin (2 sormea oik. kädestä ylhäällä) ni mie lisään tähän vielä 2 (näyttää vasemmalla kädellä 5:ta)*

- *vähensit sie ensin 10-5 ja sitten lisäät 2 vai?*
- *niin*
- *sehän oli mielenkiintoista*

Samanlaista ensimmäisen yhteenlaskettavan kympiksi muuttamista hän käytti myös yhteenlaskussa:

- *8+8*
- *(tauko) 14*
- *miten laskit?*
- *sillee, jos tää ois 10, tää ois 18, jos tää ois 9, silloin tää ois 17, mutta kun tää on 8 ni silloin tän täytyy olla 16*
- *niin*

Eteneminen pienin askelin:

Omiin strategioihin lasken myös seuraavan esimerkin 2. luokan oppilaan Millan käyttämän strategian, jossa hän laskee vähennyslaskun jakamalla vähentämällä vähentäjän pieniin osiin, jotka sitten vähentää:

- *15-7*
- *8 (tauko)*
- *joo, osaatko sanoa, miten laskit?*
- *no, otetaan ekaks 2 ja sitten se 5*
- *siis otatko ensin 13:eentoista vai ensin se 5*
- *mie otin ekaks 13:eentoista ja sitten vähennän 2 kertaa 2:n ja sitten vasta vähensin 1:n*
- *ahaa*

Laskeminen allekkain päässä:

Yksi omiin strategioihin laskemani strategia on laskun laskeminen allekkain päässä. Seuraava esimerkki on edelleen Millan laskema:

- *20-15*
- *5*
- *miten sait selville*
- *allekkain laskulla*
- *no, miten se auttoi?*
- *kun 2:sta lainaa tuosta tulee 10 ja sitten 10-5*
- *joo*

Kuten edellä olevista esimerkeistä käy ilmi laskeminen käyttäen ’omia strategioita’ tarkoittaa usein turvautumista johonkin tunnettuun tosiasiaan, esim. sellaiseen, että osataan vähentää tai lisätä luku helpommin lähtien liikkeelle tasan kympistä. Sitten mennään luettelemalla lukuja oikea määrä ylöspäin (vähennyslasku) tai alaspäin (yhteenlasku) ja päädytään oikeaan vastaukseen. Tapa vaatii kuitenkin kaksoislaskemista tai jopa kolminkertaista muistamista, koska pitää muistaa laskemisen suunta. Se on siis hankalaa ja osoituksena siitä on se, että isommilla yli kahdenkymmenen menevillä luvuilla useimmilla oppilailla, jotka käyttivät tämänkaltaista strategiaa, tulikin hankaluuksia. Laskut muodostuivat työläiksi. Siksi voisi sanoa, että tämä tapa, vaikka sisältääkin aineksia lukujen osittelusta, ja ehkä aikaa myöden jopa johtaa siihen, muistuttaa vielä perusolemukseltaan edellistä 'lukusanojen luettelemiseen' perustuvaa laskustrategiaa.

Omien strategioiden ongelmakohtia

Yhteistä "omille strategioille" on se, että laskeminen perustuu vielä pohjimmiltaan lukusanojen luettelemiseen. Apuna sitten käytetään ensimmäisen yhteenlaskettavan muuttamista kympiksi tai toisen yhteenlaskettavan (vähentäjän) osittelemista pienempiin osiin. Myös allekkain laskemista päässä käytetään, ja se onkin hyvä tapa laskea isommillakin luvuilla.

Oppilaat, jotka turvautuvat tällaisiin omiin strategioihin, käyttävät usein apuna tunnettuja lukuihin liittyviä tosiasioita, sellaisia kuin 6+6=12, 7+7=14 tai 10+10=20. Mutta he tekevät usein vääriä johtopäätöksiä koskien em. tosiasioita. Seuraavanlainen väärä johtopäätös oli yleinen:

- *8+8*
- *16*
- *miten laskit?*
- *tuo on ollu kirjassa 100 kertaa*
- *sie muistat sen?*
- *joo*

- *7+7*
- *15*
- *miten laskit?*
- *no, koska 8+8 on 16, ni sitten siitä vielä 1 pois, tulee 15*
- *joo*

Ongelmia tähän ryhmään kuuluvilla oppilailla tuli, kun siirrytään laskemaan yli 20 menevillä luvuilla, silloin nämä strategiat ovat usein hankalia ja aikaa vieviä. Kun lisäksi harjoittelimme samaan aikaan yrittäen laskea laskut osittelemalla ja kympin kautta, monille oppilaista ilmaantui tammikuun mittauksessa pahoja sekaannuksia ja virheitä. Onneksi toukokuun mittaukseen mennessä ne olivat pääsääntöisesti hävinneet.

Tällaisia virheitä oli esimerkiksi yhdellä toisen luokan oppilaalla tammikuun 2004 mittauksessa:

- *47+6*
- *(pitkä tauko) oisko 55?*
- *miten laskit?*
- *ajattelin silleen tota kun 6:sta 2 pois ni siitä jää 5, että tää muuttuis 5:ksi ja tästä jää 5, ni sillee tästä se 5 tonne ni siitä tulee 55*
- *niin, selvä*

Laskussa oppilas aivan ilmeisesti ajattelee, että 47 tarvitsee *kaksi* lisää täydentyäkseen 50:ksi. Tämän kaksi hän vähentää luettelemalla kuusi, viisi ja samalla poimii siis 6-4:n vastaukseksi 5. Samaten hän tietää, että kun lasku on 47+6 niin mennään yli viidenkympin ja siten hän poimii vastaukseksi 55. Sama oppilas laski toukokuun mittauksessa laskun seuraavasti:

- *47+6*
- *53*
- *sillee, että tästä on 49:ään matkaa 3*
- *tai miten nyt laskitkaan?*
- *ja sitten siihen 50:iin 3 lisää*

Tässä laskussa välivaiheessa oppilas ilmeisesti laskee edelleen aloittaen luvusta 47,48,49 ja tällöin hän on mielestään päässyt 50:een. Nyt hän osaa jakaa kuutosen 3 ja 3:een ja osaa myös helposti laskea 50+3=53.

Samanlainen virheellinen vähennyslaskun proseduuri samalla oppilaalla on seuraavassa laskussa:

- *82-4*
- *72*
- *miten laskit?*
- *sillee, ko tämä on 4 ni sitten tämä muuttuu 7:ksi ja silloin tässä on niiku 2 ja tämä muuttus 2:ksi, ni silloin tulisi 72*

Laskussa oppilas tietää, että kympit muuttuvat seiskaksi, koska vähennetään enemmän kuin 2, mutta samalla oikaisee niin, että ykkösiksi tuleekin hänen mielestään 4-2=2 eikä 10-2=8

Etenkin laskussa 55-9 moni teki seuraavanlaisen virheen, kuten 2. luokan oppilas syyskuussa:

- *55-9*
- *44*
- *joo, miten laskit?*
- *ensin otan sen vitosen ja sitten 4*

Eli ykkösten osalta oppilas vähensi suuremmasta luvusta 9 pienemmän luvun 5. Tämä on aivan yleinen virhe myös allekkain laskun proseduurissa, jossa ei aina muisteta, että ylemmästä luvusta pitää vähentää alempi, ja jos se ei onnistu, pitää lainata.

Edelleen kaksinumeroisten lukujen todellinen ja oikea ymmärtäminen oli syyskuun mittauksessa seuraavalla oppilaalla hukassa ja laskuja sotki myös luvun numeroiden kääntyminen. Oppilas siis lukee luvun 82 mielessään luvuksi 28.

- *82-4*
- *se on ihan tosi vaikea*
- *ei välttämättä*
- *mie tahon laskea palikoilla*

- *no laske, osaisit sie niillä palikoilla, minulla ei nyt ole 80 palikkaa, olisiko noista apua?*
- *en tiedä, äiti miulle on sanonu sillee, että jos on vaikka 82-4 ni pitää laskea sillee että 8:sta otetaan 4 pois, sitten laitetaan se tohon, 24 tulee*
- *onkohan se niin?*

Samalla oppilaalla oli seuraavassa vähennyslaskussa virheellinen proseduuri kymmenylitykseen. Myös tämä esimerkki on syyskuun mittauksesta:

- *55-9*
- *oisko se 51?*
- *miten siihen päädyit?*
- *no sillee, että 10:stä vähennetään 1 eli jää 9 eiku 10:stä vähennetään 9 ni jää 1, sitten tähän laitetaan1, tähän tulee alas, sitten jää 51*

Näillä oppilailla, jotka käyttivät strategioita, jotka luokittelin 'omat strategiat' kategoriaan näytti olevan tavallista enemmän vaikeuksia kaksinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskuissa. Heidän vaikeutensa johtuvat aivan ilmeisesti siitä, mistä Fuson (1992) puhuu, kun hän sanoo, että lapset ymmärtävät ja käsittävät luvut pikemminkin yksittäisinä yksinumeroisina lukuina, jotka on sijoitettu vierekkäin, eivätkä he näin ollen ymmärrä lukujen todellista moninumeroista luonnetta. Tyypillinen virhe näyttäisi olevan se, että vähennyslaskussa vähennetään vain kympit, eikä ollenkaan vähentäjään sisältyviä ykkösiä. Toinen hyvin tyypillinen virhe on se, että vähennetään ykköset väärinpäin.

6.4 Ositteluun perustuvat strategiat

Seuraavaksi esittelen neljännen kategorian 'ositteluun perustuvat strategiat'. Tässä tutkimuksessa olen päätynyt puhumaan 'tehokkaasta kympin kautta laskemisen' strategiasta, joka siis on osa 'ositteluun perustuvia strategioita'.

Tehokkain ja käyttökelpoisin strategia on laskea osissa siirtyen kympin kautta laskussa ylöspäin tai vähennyslaskun kyseessä ollessa alaspäin. Tällaiset tehokkaat strategiat olivat käytössä jo syksyllä 2. luokan oppilaista Liisalla, Pekalla ja Juhalla. 1. luokan oppilaista tätä strategiaa käyttivät melko pian Matti ja Seppo, 2. luokan oppilaista siihen siirtyivät syksyn mittaan Hanna ja Kaisa sekä keväällä Niina ja Maisa. Loputkin 2. luokan oppilaat käyttivät sitä joissakin laskuissa keväällä, mutta eivät pääsääntöisesti.

Luokan tehokkain laskija oli ehkä Pekka, joka syksyllä laski helposti kaikki testin tehtävät, esim. seuraavat tehtävät:

- *12-5*
- *7*
- *miten sen lasket?*
- *vähennän 5*
- *mutta selitä miten*
- *mie miinustan siit, ekan otan 2 tosta pois, sitten vielä 3*

- *15-7*

- *8 (vähän aikaa miettien)*
- *miten sie sen laskit?*
- *otan ensin 5 pois ja sitten 2*

Joskus Pekka laski vähennyslaskun yhteenlaskun kautta kuten seuraavissa esimerkeissä:

- *82-4*
- *78 (heti)*
- *miten laskit sen?*
- *koska siihen lisätään se 4*
- *78:aan?*
- *niin*
- *joo*

- *12-5*
- *7*
- *miten laskit?*
- *koska 7:sta on 3 kymppiin ja 3+2=5*
- *hyvä*

Ekaluokkalainen Matti, jolla oli hyvä ymmärrys luvuista, laski tammikuun mittauksessa seuraavasti ”viitosluvuilla”:

- *20-15*
- *se on 5*
- *miksi?*
- *no viitosluvuilla vaa*
- *ahaa*
- *yks (osoittaa 15:ta) jos kaikki otetaan 15 pois ni sit jää vaa yks vitonen*

Osittelua käytettiin tietenkin myös yhteenlaskuissa. Seuraava esimerkki on toisen luokan oppilaan Kaisan tammikuun haastattelusta:

- *47+6*
- *53*
- *miten laskit?*
- *no lisäsin kolme 7:ään*
- *ja sitten jää vielä?*
- *3*
- *hyvä, hienoa*

Fusonin (1992) mukaan laskemisen kolmannella tasolla laskeminen perustuu tunnettuihin tosiasioihin. Luvut tulevat niin ymmärrettäviksi, että niitä tai niiden summaa ei tarvitse erityisesti laskemalla laskea, vaan se on todennettavissa. (ks. 4.3.) Tälläkin tasolla vähennyslaskuun liittyvät säännöt ovat vaikeampia kuin yhteenlaskuun, mutta kuten esimerkeistä huomataan, hyvin nekin voidaan omaksua. Kaiken kaikkiaan laskeminen tulee varmemmaksi ja nopeutuu. Ositteluun perustuvien strategioiden alakategorioita ovat siis mm. **’laskeminen kympin kautta’**. Edellä oli myös esimerkki oppilaasta, joka **laski ’viitosluvuilla’**. Beishuisenin (1998) mukaan Freudenthal (1973) esitti, että laskeminen kahden välein, viitosilla tai kympeillä nähtiin tärkeäksi matemaattiseksi aktiviteetiksi. Aina ei tarvitse pitäytyä muodollisessa matematiikassa.

Edelleen ositteluun perustuviin alakategorioihin lasken mm. **tuplasummilla laskemisen, tunnetuista tosiasioista johdetut strategiat** (kuten se, että 8+8=16 niin 7+7=14) ja **kympeillä laskemisen.**

6.5 Automatisoitumisen kasvu tutuissa laskuissa

Kympin käyttöön perustuvia strategioita käyttävien oppilaiden keskuudessa tutut tehtävät osattiin pian helposti ulkoa ja niin, ettei niissä juurikaan tullut virheitä. Tähän auttoi ehkä se, että lasku on aina helposti tarkistettavissa myös laskemalla. Sen teki Pekka vielä toukokuussa, kun kysyin häneltä selitystä tuttuihin 8+8 ja 7+7 laskuihin:

- *8+8*
- *16*
- *miksi?*
- *ekana tuosta toisesta 8:sta 2 tuohon toiseen 8:aan ja sitten se on 16*
- *joo*

- *7+7*
- *14*
- *miksi?*
- *tästä laitoin tosta toisesta 7:sta 3 toiseen 7:aan*
- *joo*

Useimmiten nämä laskut, kuten sellaisetkin kuin 32+10 ja 15+15 ja olivat aivan itsestään selviä, kuten Kaisalle toukokuussa:

- *32+10*
- *42*
- *onko se helppo vai miten?*
- *niin*
- *mitä sinun tarvii miettiä siinä?*
- *10 vaan tuohon lisää (näyttää 32:ta)*

- *15+15*
- *30*
- *millä tavalla lasket?*
- *ensin nuo kymmenet yhteen ja sitten ykköset*
- *joo*

Ekaluokkalainen Matti laski nämäkin laskut hyvin ositellen ja yksinkertaisesti:

- *32+10*
- *on 42*

- *miten laskit?*
- *helposti*
- *helposti elikkä lisäät, tai sano nyt kumminkin*
- *3 vaan 4:ksi*

- *75-20*
- *on 55*
- *miten laskit?*
- *7-2 on 5, siitä*

Ne oppilaat, jotka käyttivät osittelua tehokkaasti hyväksi, laskivat helposti myös nämä kaksinumeroisiin lukuihin liittyvät yhteen- ja vähennyslaskut. Heidän laskemisensa perustui lukujen oikeaan ja hyvään ymmärrykseen ts. he osaavat laskea kympeillä aivan yhtä helposti kuin ykkösillä.

Automatisoituminen on seuraavissa 2. luokan oppilaan laskuissa toukokuun haastattelussa vahvasti mukana:

- *4+3*
- *7*
- *miten laskit sen? vai muistatko ulkoa?*
- *muistan*

- *6+4*
- *10*
- *osaatko senkin ulkoa vai lasketko jotakin? vai muistatko?*
- *en, mutta ko mie olen aina nähnyt sen vastauksen*

Automatisoitumisen osuus kasvaa kaiken aikaa. Ajatellen teoriataustassa esitettyä Galperinin (1957) opetus-oppimisprosessia kuvaavaa mallia, oppilaan laskuissa tarvitsemat henkiset operaatiot lyhenevät ja automatisoituvat, mutta tarvittaessa lasku on helposti tarkistettavissa käyttäen apuna ulkoista materiaalia. Niinpä vielä toukokuussa 2. luokan hyvin osaava oppilas turvautui laskuissa ns. back up -strategioihin ja käytti apuna sormia tai palikoita muutamassa helpossakin tehtävässä (4+3, 12-5 ja 15-7). Se ei kuitenkaan tässä tapauksessa ollut merkki siitä, että hän ei olisi osannut laskea ositellen.

6.6 Koonti laskustrategioiden kategorioista

Aiemmin kappaleessa 4.6. on esitetty yksi mahdollinen tapa luokitella erilaisia oppilaiden käyttämiä laskemisen strategioita. Se perustui Australiassa toteutettuun ENRP-tutkimushankkeeseen, jossa oppilaille oli määritelty ns. kehityspisteet laskemisen strategioihin. Oppilas voi edetä laskemisessaan aina seuraavalle tasolle näissä laskemisstrategioissaan. (Gervasoni 2006, 180.)

Nyt edellä esittämäni neljä erilaista laskustrategioiden kategoriaa voidaan esitellä tukeutuen näihin kehityspisteissä mainittuihin laskustrategioihin. Taulukossa 3 on esitelty summittainen kehityspisteiden ja tämän tutkimuksen laskustrategioiden kategorioiden välinen yhteys. Kuitenkin kolmanteen kategoriaan ’omat strategiat’ voi kuulua myös muita tunnettuja lukuihin liittyviä tosiasioita sekä myös johdettuja tosiasioita, joita kuitenkin voidaan käyttää väärin. Esim. sellainen tosiasiatieto, että 8+8=16 voi aiheuttaa väärän päätelmän laskussa 7+7, josta oppilas voi päätellä vastaukseksi ’yksi vähemmän’ eli 15.

Taulukko 3. Laskustrategioiden kategoriat verrattuna ENRP-kehityspisteisiin.

Laskustrategioiden kategoriat	**ENRP:n kehityspisteet**
1. **Puutteelliset strategiat** - yksi-yhteen vastaavuuden puuttuminen - ei kykene kaksoislaskemiseen (double counting)	0. ei vielä kykene yhdistämään ja laskemaan kahta eri esineiden ryhmää
2. **Lukusanojen luettelemiseen perustuvat strategiat** - laskeminen palikoiden avulla alkaen joko ensimmäisestä tai toisesta yhteenlaskettavasta - laskeminen vähennyslasku palikoiden avulla - laskeminen yhteenlaskussa ylöspäin alkaen toisesta yhteenlaskusta - laskeminen vähennyslaskussa alaspäin - laskeminen sormia apuna käyttäen - vähennyslaskun laskeminen yhteenlaskun avulla - laskeminen etenee konkreettisista esinemalleista symbolitasolla tapahtuvaan	1. laskee kaikki esineet löytääkseen kokonaismäärän [count all (two colections)] 2. laskee toisesta numerosta löytääkseen kokonaismäärän (count on from one number to find the total of two collections) 3. laskee takaisin/ laskee alaspäin / laskee ylöspäin (annetussa vähennyslaskutilanteessa valitsee sopivan strategian, johon voi sisältyä se, että luvusta lasketaan takaisinpäin/ alaspäin/ ylöspäin)
3. **Omat strategiat** - ensimmäinen yhteenlaskettava muunnetaan kympiksi ja siitä edetään vaiheittain tulokseen - muut omat strategiat, mm. allekkain lasku päässä, eteneminen pienin askelin - väärin opittuja lukuihin liittyviä tosiasioita	4. 10 lisääminen, kymppiin liittyvät faktat,
4. **Ositteluun perustuvat strategiat** - luvut ovat ymmärrettäviä - oikein opittuja lukuihin liittyviä tosiasioita - laskeminen kympin kautta - laskeminen ’viitosluvuilla’ - laskeminen tuplasummien avulla - ’kympeillä’ laskeminen - laskut nopeutuvat ja automatisoituvat	4. perusstrategiat (tuplaluvut, liitännäisyys, 10 lisääminen, kymppiin liittyvät tosiasiat, muut tunnetut lukuihin liittyvät tosiasiat) 5. johdetut strategiat (lähellä tuplasummaa, 9 lisääminen, lasketaan 10:ään, tosiasia ryhmät, intuitiiviset strategiat)

6.7 Oppilaiden lukujonotaidot

Tarkastellaan seuraavaksi oppilaiden lukujonotaitoja. Lukujonotaidot ovat tärkeä ja oleellinen taito muiden matemaattisten taitojen kehittymisen ja oppimisen kannalta (Aunio 2008, 66). Niitä mitattiin siten, että pyysin oppilasta laskemaan luvut yhdestä kahteenkymmeneen ja sitten alaspäin kahdestakymmenestä ykköseen. Sen jälkeen piti jatkaa lukujonoa 2,4,6,… ja 1,3,5,… kahteenkymmeneen asti. Vielä piti jatkaa lukujonoa 20, 18, 16,… nollaan asti. Kyselin vielä ’yhtä pienempi kuin’ ja ’yhtä suurempi kuin’ sekä ’kahta pienempi kuin’ ja ’kahta suurempi kuin’ tyyppisiä tehtäviä lukualueella 0–100. Nämä viimeksi mainitun tapaiset tehtävät olivat yleisesti ottaen niin helppoja, että ne eivät paljonkaan tuoneet lisävalaistusta oppilaan lukujonotaitoihin.

Ensimmäisen luokan oppilaista Matilla ja Sepolla oli hyvät lukujonotaidot jo syyskuun mittauksessa. Myös Harri osasi hyvin luetella sekä parillisia että parittomia lukujonoja jo syyskuussa. Paavo luetteli luvut 20:stä alaspäin palikoita katsoen. Alaspäin parillisia lukuja luetellessa ne vaihtuivat parittomiksi (20,18,16,15,13,11,9,7,5,3,1). Tammikuun mittauksessa Paavolla oli lukujonoissa pientä epävarmuutta, mm. parittomien lukujen ketju vaihtuikin kolmen väliseksi (1,3,5,7,10,13,16,19). Toukokuussa Paavo sitten selvisi kaikista lukujonotehtävistä hyvin ja helposti.

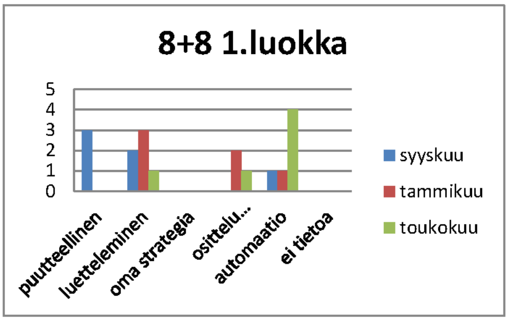
Heikoimmat lukujonotaidot olivat Jarkolla ja Tuomolla. Jarkolla oli käytössä 'kymmenentoista' luvun 20 tilalla. Myös parilliset ja parittomat luvut olivat aivan kadoksissa. Tammikuun mittauksessa Jarkko osasi luetella luvut 1–20 myös takaperin. Samoin hän osasi luetella parittomat luvut oikein, parillisissa tuli pieni virhe. Hän ei kuitenkaan osannut luetella parillisia lukuja 20:stä alaspäin. Se ei onnistunut vielä toukokuussakaan. Tuomo osasi syyskuun mittauksessa luetella luvut 1–20 oikein, mutta ei takaperin. Parilliset ja parittomat lukujonot eivät myöskään onnistuneet. Tammikuussa Tuomo osasi sitten kaikki lukujonotehtävät, mutta yllättäen toukokuussa sekä parittomien lukujen että lukujonon 20,18,16… luettelemisessa oli virheitä.

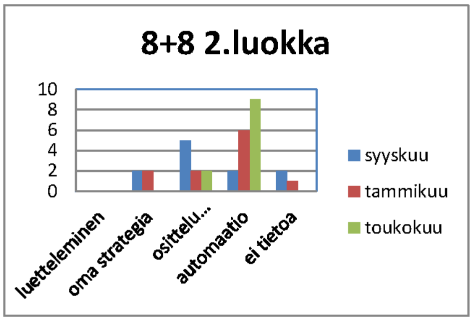
Toisen luokan oppilaista hyvät lukujonotaidot olivat Juhalla, Pekalla, Liisalla, Hannalla ja Maisalla. Kaisalla, Merjalla, Niinalla ja Millalla parilliset luvut 20,18,16,… vaihtuivat parittomiksi syyskuussa. Mutta tammikuun ja toukokuun mittauksessa ne osattiin, paitsi Milla, jolla toukokuun mittauksessa vaihtuivat sekä parilliset että parittomat luvut. Leenalla selvitti syyskuun lukujonotehtävät hitaasti ja hiukan takellellen virheittä, mutta tammikuussa ja toukokuussa lukujonoista jäi puuttumaan joitakin lukuja. Riinalla parittomat luvut vaihtuivat parillisiksi kaikissa kolmessa mittauksessa.

6.8 Strategiat eri tehtävissä

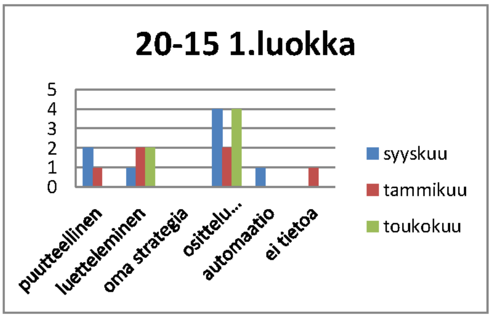
Tarkastellaan lopuksi joidenkin testin tehtävien osalta, mitä strategioita oppilaat niissä käyttivät yleisimmin. Sellaiset tehtävät kuin 2+2, 4-4 ja 10-1 olivat lähes poikkeuksetta automaation tasolla

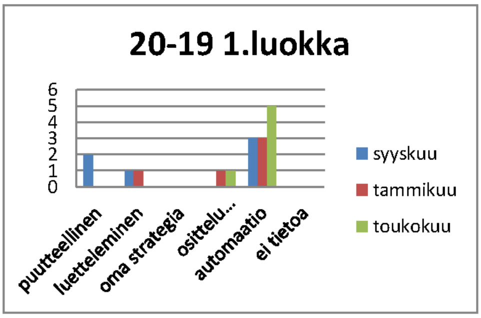
Seuraavaksi testin tuplasummat 8+8 ja 7+7, jotka myös haastattelussa kysyttiin peränjälkeen. Tällöinhän ilmeni yleinen virhe siitä, että jotkut oppilaat laskivat ensin 8+8=16 ja siitä seuraa, että 7+7=15. Seuraavassa laskun 8+8 jakauma 1. ja 2.luokan osalta. Molemmissa tapauksissa huomataan, että toukokuun mittauksessa lasku 8+8 on suurimmalla osasta oppilaita automatisoitunut. Sama koskee myös laskua 7+7.



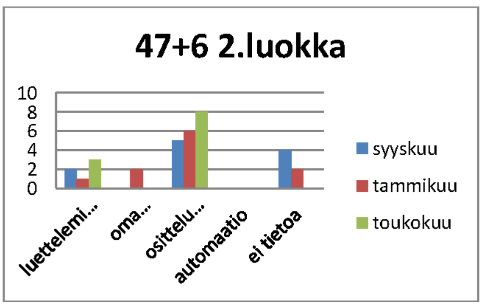


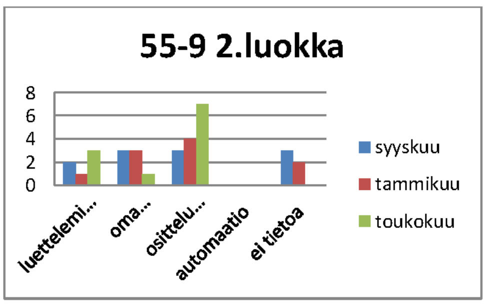
Seuraavassa 1. luokan osalta tehtävät 20-15 ja 20-19. Huomataan, että tehtävässä 20-15 ositteluustrategian käyttö on yleisin strategia. Tehtävä 20-19 on toukokuussa automaatio kaikilla yhtä oppilasta lukuun ottamatta.





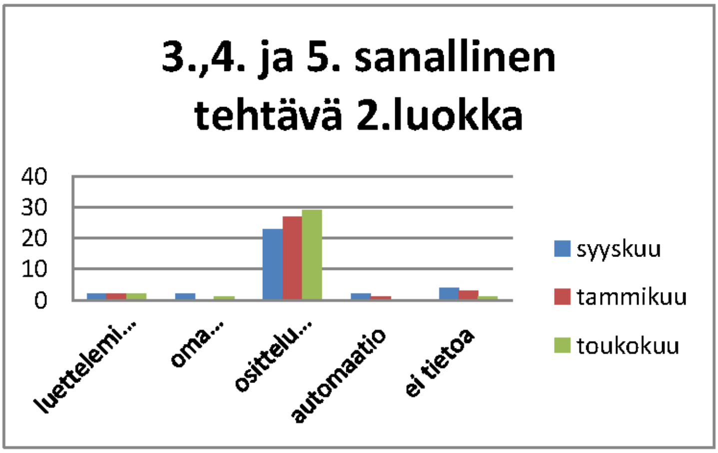
Suuremmilla luvuilla laskettaessa on luonnollista siirtyä käyttämään ositteluun perustuvia strategioita, kuten seuraavat 2. luokan esimerkit osoittavat. Tällaiset tehtävät eivät tietenkään automatisoidu.





Sanalliset tehtävät 3, 4 ja 5:

Näissä tehtävissä esiintyy kussakin tehtävässä kolme lukua ja niissä on luontevaa käyttää ositteluun perustuvia strategioita. Näin myös tapahtui. Tehtävät myös osattiin hyvin. Kun syyskuussa oli vielä kaikkiaan 33:sta tehtävästä 7 tehtävää väärin ja lisäksi 3 tehtävää väärin siten, että vastaus oli väärin yhdellä. Niin toukokuussa oli vain yksi tehtävä, jossa vastaus oli väärin yhdellä. Tämä osoittaa sen, että toisen luokan keväälle tultaessa lukualueen 0–20 laskut hallitaan hyvin. Siihen voi vaikuttaa myös se, että yhdysluokassa toisen luokan oppilaatkin joutuvat seuraamaan paljon vielä kymmenylityksen opetusta.

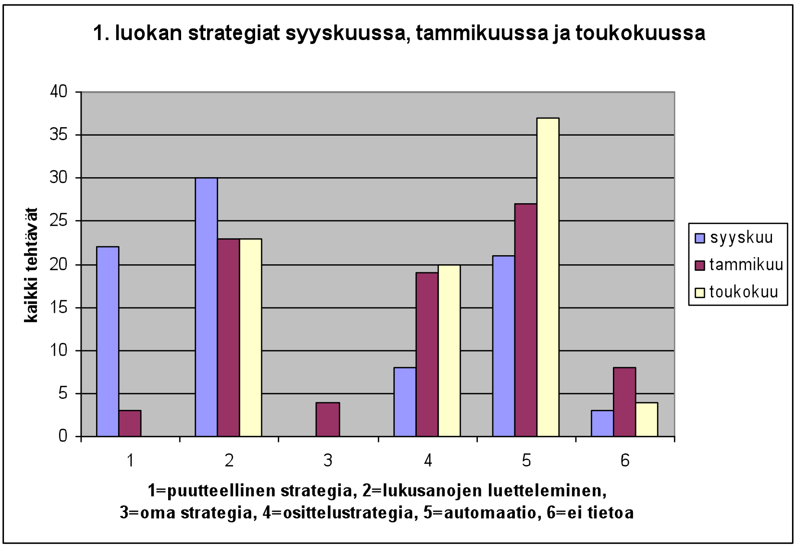


7 Laskustrategioiden kehittyminen

Oppilaan laskustrategiat siis kehittyvät ja muuttuvat. Samaan aikaa oppilas voi eri tehtävissä käyttää erilaisia strategioita. Tässä luvussa analysoidaan eri strategioiden esiintymistä kolmessa eri mittauksessa: syyskuun 2003, tammikuun 2004 ja toukokuun 2004 mittauksessa. Myös tehtävien sujuvuutta ja osaamista tarkastellaan. Samoin tarkastellaan oppilaiden sijoittumista eri kategorioihin. Lopuksi kerrotaan joidenkin oppilaiden osaamisesta vuoden kuluttua alkuperäisistä mittauksista.

7.1 Ensimmäisen luokan strategiat

Seuraavassa taulukossa on esitetty 1. luokkalaisten oppilaiden käyttämät eri strategiat eri mittauksissa. Oppilaita on siis 6 ja jokaisella 14 tehtävää eli yhteensä 84 tehtävää (ks. liite 1).



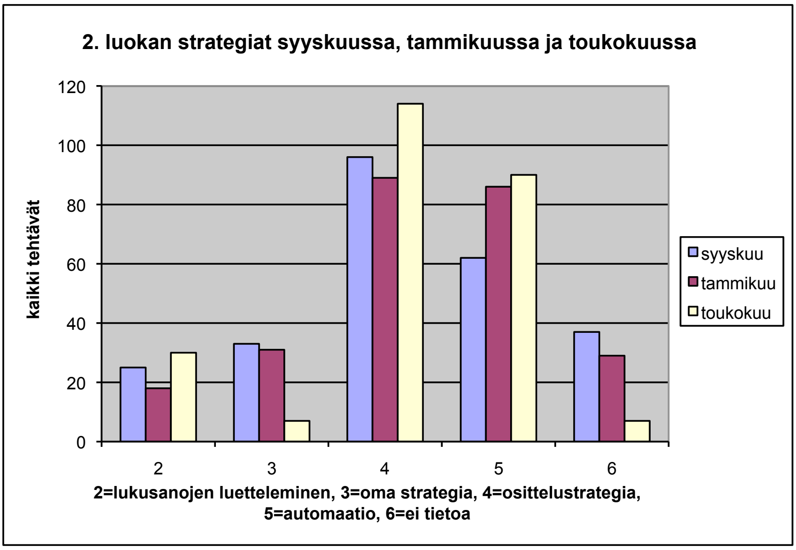
Syyskuun 2003 mittauksessa suurimman ryhmän muodostavat lukusanoilla luettelemiseen perustuvat strategiat ja puutteelliset strategiat. Vähemmin on ositteluun perustuvia strategioita, mutta melko paljon on automatisoitumista tapahtunut. Se taas johtuu siitä, että testissä oli mukana helpot laskut 4-4, 10-1 ja 2+2.

Tammikuulle 2004 tultaessa puutteelliset strategiat ovat lähes kokonaan kadonneet ja osittelun ja automatisoitumisen osuus on kasvanut. Lukusanojen luettelemisstrategian osuus on edelleen korkea ja joitakin omia strategioita on ilmaantunut.

Toukokuun 2004 mittauksessa automatisoitumisen osuus on erityisen korkea. Siis lukualueella 0–20 alkavat tehtävät olla niin tuttuja, että ne muistetaan ulkoa. Toisaalta 2. kategorian omat strategiat ovat kokonaan kadonneet ja ositteluun perustuvat strategiat ovat lisääntyneet.

7.2 Toisen luokan strategiat

Seuraavassa on esitetty 2. luokan oppilaiden käyttämät strategiat eri mittauksissa. Oppilaita on siis 11 ja tehtäviä 23 kussakin mittauksessa eli yhteensä 253 tehtävää.



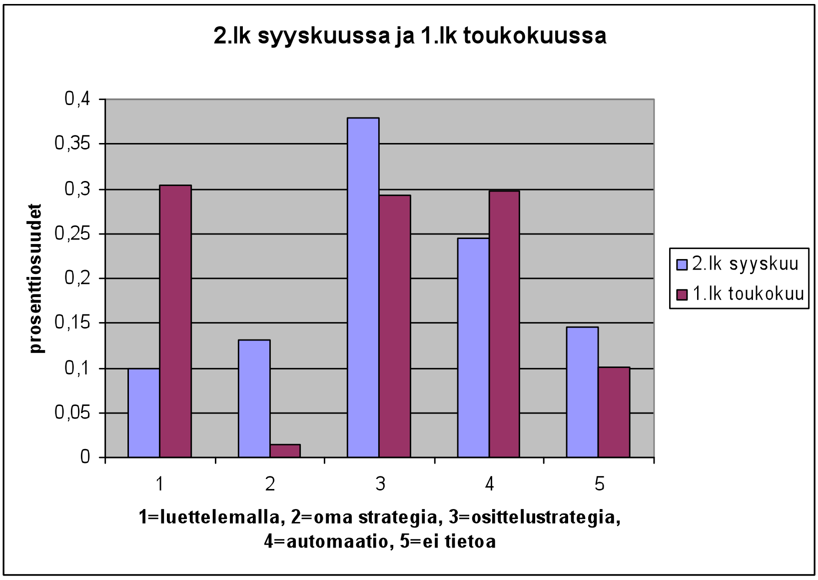
Syyskuussa 2003 toisen luokan oppilaiden eniten käyttämät strategiat kuuluvat kategoriaan 'osittelun perustuvat strategiat'. Toiseksi eniten esiintyy jo automatisoituneita tehtäviä. Jonkin verran on käytössä lukusanojen luettelemiseen perustuvia strategioita sekä niitä strategioita, jotka luokittelin kategoriaan 'omat strategiat'. Huomattavan iso osa tehtävistä on luokiteltu luokkaan 'ei tietoa'.

Tammikuulle 2004 tultaessa automaation osuus on selvästi lisääntynyt. Toisaalta omien strategioiden ja lukusanojen luettelemisstrategian käytössä ei ole tapahtunut suuria muutoksia. Osittelun perustuvat strategiat ovat hiukan vähentyneet.

Toukokuulle 2004 tultaessa omien strategioiden osuus on vähentynyt ja osittelun perustuvat strategiat ovat lisääntyneet. Yllättäen lukusanojen luettelemiseen perustuva strategia on jopa hiukan lisääntynyt, tosin todennäköisesti vain sen ansiosta, että toukokuun mittauksessa ei esiintynyt niin paljon epäselviksi jääneitä strategioita.

7.3 Ensimmäisen luokan strategiat toukokuussa verrattuna toisen luokan strategioihin syyskuun alkumittauksessa

Seuraavassa on verrattu ensimmäisen luokan oppilaiden strategioita toukokuun mittauksessa toisen luokan oppilaiden strategioihin syyskuun alkumittauksessa. Voisihan olettaa, että 1. luokan keväällä oppilaat ovat suunnilleen samalla tasolla matematiikan osaamisessaan kuin 2. luokan oppilaat olivat syksyllä koulun aloittaessaan. Vertailun voi tehdä, koska toukokuun mittauksessa 1. luokan oppilaat tekivät haastattelussa koko testin, siis saman kuin 2. luokan oppilaat.



Huomataan, että 1. luokan oppilailla ei juuri esiinny strategioita, jotka nimesin nimellä "omat strategiat". Se voisi osaltaan johtua siitä, että lukuvuoden mittaan yritimme opiskella ja kehittää ositteluun perustuvia strategioita.

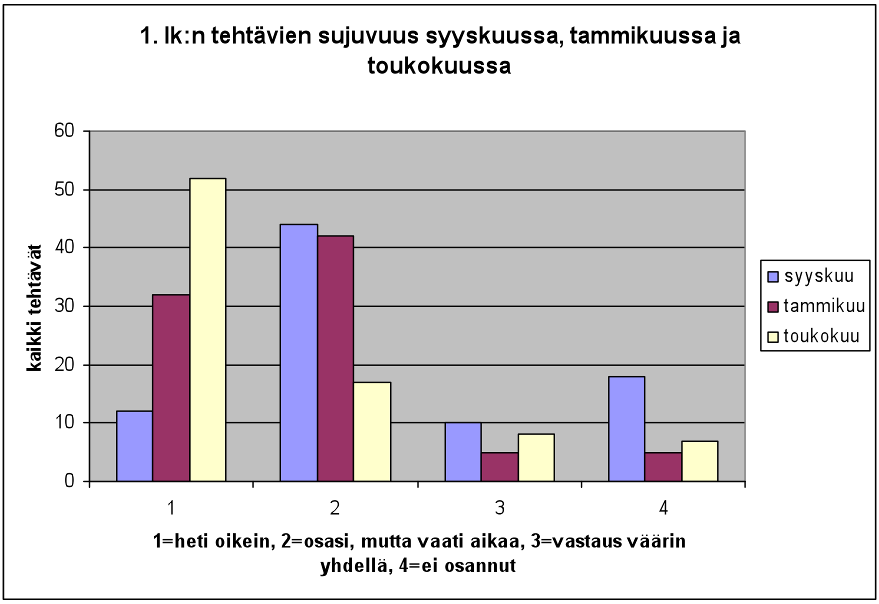
Kuitenkin lukusanojen luettelemiseen perustuvat strategiat ovat 1. luokan oppilailla suhteessa 2. luokan oppilaiden vastaaviin paljon yleisempiä. Ositteluun perustuvat strategiat ovat 1. luokan oppilailla hivenen vähäisempiä verrattuna 2. luokan vastaaviin. Automaation osuus puolestaan on 1. luokan osalta suurempi verrattuna 2. luokan vastaavaan. Huomataan siis, että 1. luokalla laskeminen perustuu hyvin pitkälti laskemiseen lukusanoja luettelemalla. 2. luokan oppilaat olivat mittaushetkellä hivenen vanhempia (kesäloma takana), joten heidän strategianvalintansa olivat hiukan kehittyneempiä.

7.4 Tehtävien osaaminen ja automatisoitumisen aste

Teorian mukaisesti tehtävien osaaminen paranee ja laskeminen nopeutuu. Samalla kasvaa automatisoitumisen aste, kun osa tehtävistä on niin ilmeisiä, että vastaus on heti todettavissa. (Galperin 1957; Fuson 1992.)

7.4.1 Ensimmäisen luokan osaaminen ja tehtävien automatisoitumisen aste

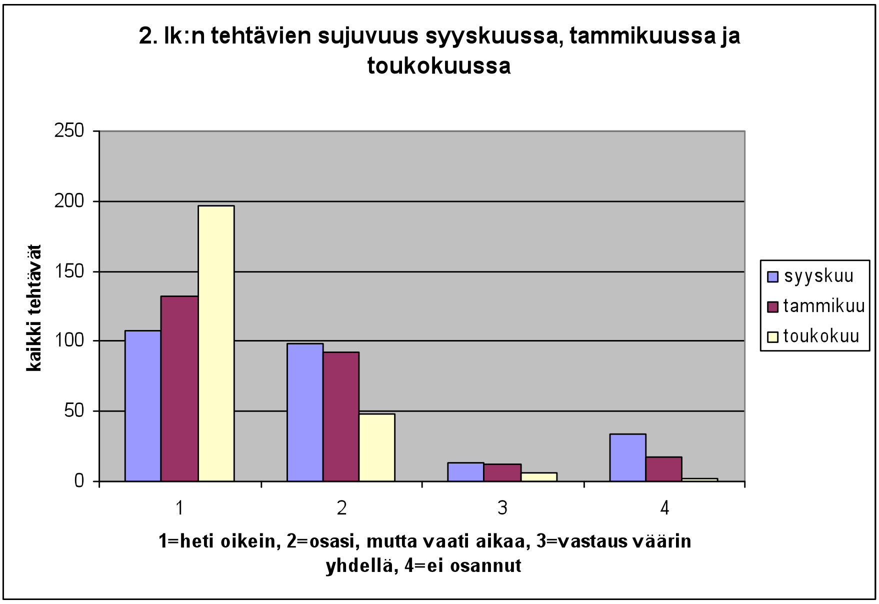
Tehtävien osaaminen ja vastaamisen sujuvuus on esitelty seuraavassa taulukossa. Tehtävä on luokiteltu heti osatuksi, jos oppilas on osannut heti sanoa oikean vastauksen joko assosioiden tehtävän oikeaan vastaukseen tai sitten sujuvasti laskemalla. Moni tehtävä vaati aikaa ja miettimistä, ja tällaiset ratkaisut on myös luokiteltu, kuitenkin aikaa mittaamatta. Erikseen on luokiteltu ne vastaukset, joissa ratkaisu on väärin yhdellä. Tämä siksi, että oletukseni mukaan lukusanoja luettelemalla laskettaessa vastauksen voi poimia väärin, jolloin tulos usein heittää yhdellä.



Kuten taulukosta huomataan, heti oikein vastattujen tehtävien osuus on kasvanut selvästi joka mittauksessa. Toisaalta on mielenkiintoista se, että yhdellä väärin menneitä vastauksia esiintyy kaikissa mittauksissa. Ne selittyvät sillä, että lukusanojen luettelemisstrategiaan sisältyy tämä mahdollisuus vastauksen väärin menemisestä yhdellä. Kuitenkaan mikään tehtävä ei erityisesti noussut esille tältä osin. Huomattavaa on myös, että toukokuun mittauksessa oli vielä vääriä vastauksia suunnilleen sama määrä (2 enemmän) kuin tammikuun mittauksessa.

7.4.2 Toisen luokan osaaminen ja tehtävien automatisoitumisen aste

Toisen luokan tehtävien osaaminen on luokiteltu samoin kuin ensimmäisenkin luokan tehtävien osaaminen ja näyttää seuraavalta:



Huomioitavaa on, että tehtävien sujuva osaaminen lisääntyy joka mittauksessa ollen toukokuussa todella hyvä. Tehtävien yhdellä numerolla väärät vastaukset ja ylipäätään väärät vastaukset häviävät lähes kokonaan toukokuun mittaukseen mennessä. Tämä kertoo siitä, että peruslaskutoimitukset alkavat olla toisen luokan oppilailla hyvin hallussa kevääseen mennessä. Myös käytetyt strategiat osoittautuvat tehokkaiksi. Ne oppilaat, jotka vielä käyttävät lukusanojen luettelemiseen perustuvia strategioita, osaavat käyttää niitä nopeasti ja tehokkaasti. Toisaalta muistamiseen perustuvat tutut lukuihin liittyvät tosiasiat ovat jo hyvin hallussa. Oppilas voi siis käyttää tehokkaasti erilaisia strategioita, esimerkiksi niin, että tutut laskut alle 20 luvuilla osataan lähes ulkoa ja isommilla luvuilla laskettaessa käytetään ositteluun perustuvia strategioita.

7.5 Oppilaiden erilaiset oppimispolut

Seuraavassa on esitetty oppilaiden sijoittuminen eri kategorioihin ja heidän siirtymisensä eri testeissä kategorioista toiseen. Näistä erilaisista siirtymistä on hahmoteltavissa erilaisia oppimispolkuja. Niistä ensimmäinen on se, kun oppilas siirtyy puutteellisten strategioiden käytöstä lukusanojen luettelemiseen perustuvien strategioiden käyttöön. Toinen oppimispolku on se, kun oppilas siirtyy lukusanojen luettelemisstrategian käytöstä suoraan tehokkaampaan ositteluun perustuviin strategioihin. Huomioitavaa on se, että tämä voi tapahtua 1. luokan oppilaankin osalta melko pian syksyn mittaan.

Toukokuun 2004 mittauksessa tehokkaita ositteluun perustuvia strategioita käytti kahdeksan yhdestätoista toisen luokan oppilaasta ja kaksi kuudesta ensimmäisen luokan oppilaasta.

Taulukko 4. Ensimmäisen luokan oppilaiden sijoittuminen eri kategorioihin kolmessa eri mittauksessa. Suluissa oleva kuukausi kertoo sen, että mittauksessa on myös ko. strategian käyttöä jossakin määrin.

	Puutteelliset strategiat	**Lukusanojen luetteleminen**	**Ositteluun perustuvat strategiat**
1. luokka:			
Tuomo	syyskuu	tammikuu, toukokuu	(toukokuu)
Jarkko	syyskuu	tammikuu, toukokuu	
Paavo	syyskuu	(syyskuu), tammikuu, toukokuu	
Harri	syyskuu	(syyskuu),tammikuu, toukokuu	
Seppo		syyskuu	tammikuu, toukokuu
Matti		syyskuu	tammikuu, toukokuu

Neljällä 1. luokan oppilaalla oli syyskuun 2003 mittauksessa puutteellisia strategioita, vaikka osittain he laskivatkin luettelemalla ja erityisesti pystyivät laskemaan palikoiden avulla. Tämä silti, vaikka koulua oli käyty jo noin neljä viikko ennen syyskuun mittausta ja matematiikkaakin tietenkin tunneilla opiskeltu. Vähän myöhemmin he kyllä kaikki siirtyvät käyttämään pääasiassa luettelemiseen perustuvia strategioita.

Vain kahdella 1.luokan oppilaalla kuudesta oli heti syksyllä valmiina strategiat yhteen- ja vähennyslaskuihin, mutta hekin ymmärsivät laskemisen lähinnä lukujen luettelemisena eteen- tai taaksepäin. Kuitenkin juuri nämä oppilaat siirtyivät varsin pian syksyn mittaan käyttämään tehokkaimpia ositteluun perustuvia strategioita. Muut 1. luokan oppilaat käyttivät koko vuoden lähinnä lukusanojen luettelemiseen perustuvia strategioita, jotka kuitenkin nopeutuivat ja tulivat helpommiksi.

Taulukko 5. Toisen luokan oppilaiden sijoittuminen eri kategorioihin kolmessa eri mittauksessa. Suluissa oleva kuukausi kertoo sen, että mittauksessa on myös ko. strategian käyttöä jossakin määrin.

	Lukusanojen luetteleminen	**Omat strategiat**	**Ositteluun perustuvat strategiat**
2.luokka:			
Riina	syyskuu, tammikuu, toukokuu,	(tammikuu)	(toukokuu)
Merja	syyskuu, tammikuu, toukokuu,	(tammikuu)	(tammikuu, toukokuu)
Leena	(syyskuu)	syyskuu, tammikuu,	toukokuu
Milla		(syyskuu, tammikuu, toukokuu)	syyskuu, tammikuu, toukokuu
Niina		(syyskuu, tammikuu)	syyskuu, tammikuu toukokuu
Maisa		(syyskuu, tammikuu)	syyskuu, tammikuu, toukokuu
Hanna		(syyskuu)	syyskuu, tammikuu, toukokuu
Kaisa		(syyskuu)	syyskuu, tammikuu, toukokuu
Liisa		(syyskuu)	syyskuu, tammikuu, toukokuu,
Juha			syyskuu, tammikuu, toukokuu,
Pekka			syyskuu, tammikuu, toukokuu,

Toisen luokan oppilaiden osalta yksi oppimispolku, jota käytti kaksi oppilasta, oli se, että he pysyivät jokaisessa mittauksessa pääasiassa luettelemisstrategian käyttäjänä. Toinen oppimispolku on sellainen, jossa lähinnä pysytään omien strategioiden käyttäjänä, vaikka osa näistä omista strategioista vaihtuukin osittelun käyttöön tai myös lukusanojen luettelemisstrategian käyttöön. Kolmas oppimispolku johtaa omien strategioiden käytöstä ositteluun perustuvien strategioiden käyttöön ja neljäs oppimispolku on sellainen, jossa oppilas on jokaisessa mittauksessa pääasiassa osittelustrategian käyttäjä.

Suuri osa toisen luokan oppilaista käytti syyskuun ja tammikuun mittauksissa sekä luettelemiseen perustuvia että niitä strategioita, jotka luokittelin 'omiksi strategioiksi'. Kuten aiemmin on jo analysoitu nämä 'omat strategiat' hyvin pitkälti perustuvat vielä lukujen luettelemiseen, vaikka siirtymää osittelun käyttöön laskustrategioissa on jo havaittavissa. Näihin strategioihin kuului mm. strategia, jossa ensimmäinen yhteenlaskun tai vähennyslaskun jäsen piti aina mielellään muuntaa kympiksi, ja sitten lasku eteni enemmän tai vähemmän luettelemiseen ja kaksoislaskentaan perustuen. Kaaviosta käy ilmi oppilaiden siirtymisen suunta kohti ositteluun perustuvia strategioita.

On huomioitava, että oppilaiden sijoittaminen tiettyyn kategoriaan ei ole yksiselitteinen. Nimenomaan oppilaat, joilla oli käytössä laskustrategioita, jotka olen luokitellut kategoriaan 'omat strategiat', oli vain tietty määrä näitä strategioita.

Heidän laskemisensa perustui usein myös jo ositteluun tai sitten vielä laskemiseen 'lukusanoja luettelemalla'. Selkeämmin 'omien strategioiden', käyttäjä oli Leena, joka kuitenkin toukokuun mittauksessa oli siirtynyt enemmän osittelustrategian käyttäjäksi. Samoin 2. luokan oppilaan Merjan sijoittaminen em. kategorioihin on hankalaa. Olen sijoittanut hänet 'lukusanojen luetteleminen' kategoriaan, vaikka hänellä oli käytössä joitakin omia strategioita sekä jo syyskuun mittauksessa ositteluun perustuvia strategioitakin. Edellä olevat taulukot onkin nähtävä vain suuntaa antavina tuloksina.

Kaikkiaan useimmat toisen luokan oppilaat siirtyivät vuoden mittaan yhä enemmän ositteluun perustuvien strategioiden käyttäjiksi. Myös automatisoitumisen osuus tehtävien ratkaisuissa kasvoi.

7.5.1 Ensimmäisen luokan oppilaiden sijoittuminen eri oppimispoluille

Heikoin lähtötilanne ensimmäisen luokan syksyllä oli Tuomolla ja Jarkolla. Tämä myös näkyi heidän matematiikan koenumeroissaan, jotka olivat Tuomolla syksyn kokeissa 13/28 ja 3/28 pistettä ja Jarkolla 8/28 ja 8/28 pistettä. Ne olivat selkeästi heikompia kuin luokan muilla oppilailla. Seuraavassa valitsen heistä Jarkon ja luonnehdin hänen osaamistaan ja sen muutoksia eri mittauksissa:

Jarkko:

Jarkolla lukujen luetteleminen 1:stä 20:een ei onnistunut syksyllä. Kahteen kymppiin laskiessa hän sormella seurasi kymppisauvaa edestakaisin ja hyppäsi 18:sta 21:een. Parillisten ja parittomien lukujen luetteleminen ei sujunut ja alaspäin 20:stä luetellessaan Jarkko kääntyi aina luettelemaan suurenevia lukuja. Lisäksi hän käytti välillä luvusta 20 nimitystä "kymmenentoista" Sen sijaan "yhtä pienempi, yhtä suurempi, kahta pienempi ja kahta suurempi" kuin kysytty luku -tyyppiset tehtävät sujuivat kahta lukuun ottamatta oikein. Jarkon lukujonotaidot olivat siis heikot.

Varsinaisissa laskuissa Jarkko osasi vain jotkut tutuimmat ja helpot laskut, kuten 2-2, 4+3 ja 4-4 sekä 6+4. Muissa laskuissa Jarkko yritti laskea palikoiden avulla, mutta siinäkin oli suuria vaikeuksia:

- *8+8, voit käyttää palikoita*
- *(laskee kahdesta 10:n sauvasta ensin toisesta 1,…,8, sitten rinnakkaisista sauvoista 1,…,16 irrottamatta mitään ja vastaa) 16*
- *mistä sait sen selville?*
- *näistä molemmista palikoista*
- *näytätkö vielä uudestaan ja sano samalla ääneen*
- *(laskee ääneen ny)t 1,…,9 (vaihtaa toiseen) 10,…,16 ja pysähtyy siihen, kysyy: onko se oikein?*
- *on se oikein, mutta mistä sinä sen laskit jäi minulle vielä vähän epäselväksi*
- *näistä kaikista palikoista*
- *näytätkö vielä, mistä otit sen 8?*
- *(Jarkko piirtää sormella toista 10:n sauvaa)*
- *otatko vielä sen 8 palikkaa?*

- *(nyt irrottaa molemmista 10:n sauvoista 2 palikkaa), näin*
- *selvä*

Jarkko aloitti aina laskemaan ykkösestä ja jopa yksi yhteen -vastaavuus ei aina ollut hänelle selvä. Niinpä hän sai yhdessä välivaiheessa kymppisauvasta luvuksi 12 lukusanojen luettelun ja sormen mennessä eri tahtia. Laskusta 12-5 Jarkko arvasi vastaukseksi 5, sitä hän ei pystynyt laskemaan. Laskuja 20-15 ja 20-19 hän ei osannut laskea, vaan piti niitä liian vaikeina. Minkäänlaisia merkkejä ositteluun perustuvista strategioista ei ollut näkyvillä, vaan Jarkko piti laskemisena yksinomaan lukusanojen luettelemista tai palikoiden avulla laskemista.

Matematiikka oli Jarkon mielestä sekä kivaa että tylsää. Vaikeat laskut, etenkin miinuslaskut olivat tylsiä, eikä Jarkko aina pitänyt matematiikasta koulussa.

Tammikuun mittauksessa lukujen luetteleminen sujui nyt etu- ja takaperin. Parillisissa luvuissa tuli pieni virhe, mutta parittomat menivät oikein. Sen sijaan parilliset luvut 20:stä alaspäin eivät vieläkään sujuneet.

Laskutehtävistä Jarkko sai nyt paljon enemmän oikein. 2+2, 4+3, 6+4, 4-4 ja 10-1 sujuivat ulkomuistista. Laskussa 9+6=15 oli käytössä osittelustrategia, vaikka Jarkko ensin sanoi vastaukseksi16. Selitysvaiheessa hän kuitenkin laski ”*otin ton kympin ja sittenhän siitä tulee 15*”.

Lasku 8+8 sujui nyt seuraavalla tavalla.

- *8+8*
- *18*
- *miten laskit?*
- *no sillee, että mä opin sen vaan, että mä muistin yhtäkkiä, että se on 18*
- *no onko se?*
- *ei*
- *paljos se vois olla?*
- *(tutkii palikoita vähän aikaa, erottaa kaksi 8:n palan sauvaa)*
- *joo*
- *2,4,6,8,10,12,14,16 (laskee pareittain 2 kertaa 8:n sauvaa)*

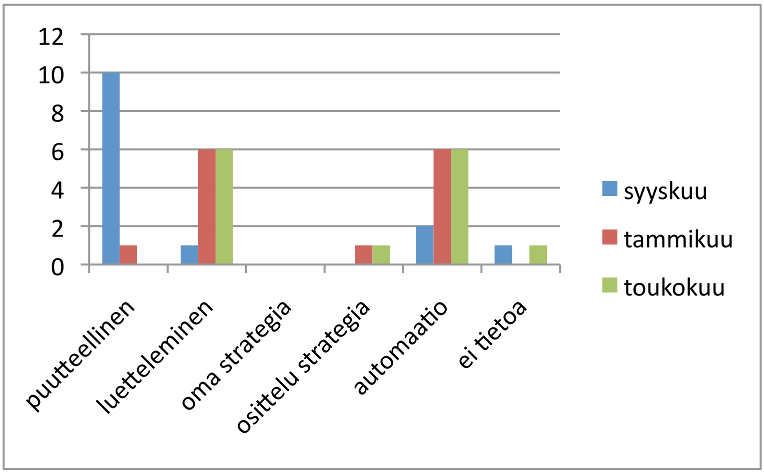
Samoin hän laski laskun 7+7=14. Palikoilla sujui myös lasku 12-5=7. Sen sijaan laskussa 20-15 Jarkolla oli esillä kyllä 15 ja 5 palikka sauvoina, mutta vastaukseksi hän poimi siitä luvun 15. Kokonaisuutena Jarkon laskutaito ja lukukäsitys olivat kyllä kehittyneet, enää hän ei esimerkiksi aloittanut laskemaan ykkösestä alkaen, mutta varsinaiset ositteluun perustuvat strategiat eivät olleet vielä kehittyneet. Jarkon mielestä matematiikka oli aika vaikeata ja kotitehtävät olivat vaikeita.

Toukokuun mittauksessa Jarkon lukujonotaidoissa oli vielä puutteita ja hän laski edelleen pääasiassa lukusanojen luettelemiseen perustuvaan strategiaan turvautuen. Esim. laskun 20-15 hän laski tällä tavalla 19,18,…,10,…,4 päätyen väärään vastaukseen 4. Samoin hän laski väärin 12-5=8, koska luettelemalla (12,11,10,9,8) voi päätyä lukuun 8, kun ei osaa poimia vastaukseksi seuraavaa lukua 7.

- *12-5*
- *(laskee mielessään) 8*
- *miten laskit?*
- *sillee näistä palikoista, mä katoin 12, tässä on se 10, tässä on 12, sitten siitä vähennetään 5, ni sittenhän se on 8*

Suurilla luvuilla eivät onnistuneet laskut 47+6, 55-9 eikä 75-20. Sen sijaan 78-4 meni oikein, samoin laskut 32+10 ja 20-19 onnistuivat helposti. Jarkko oli oppinut väärin muistamaan, että 8+8 on 14, ja sen takia hän myös laski 7+7 on 12. Hänellä oli siis käytössä väärin opittu tosiasiatieto. Toukokuun matematiikan kokeessa Jarkko sai tuloksen 17/28 pistettä.

Jarkon strategiat eri mittauksissa:



Jarkko vuoden kuluttua 2. luokan keväällä 2005:

Jarkolla oli joukko omia strategioita. Hän myös muisti esim. 8+8=16 ja päätteli siitä 7+7 oikein. Vähennyslaskuissa oli joitakin virheellisiä käsityksiä kuten 42-14=32 (vähensi ykkösissä väärinpäin 4-2) tai 80-35=55, Jarkon mielestä 5:ta ei tarvinnut enää vähentää. Samoin tehtävässä 750-125 Jarkko vastasi 635 jättäen 5:n vähentämättä. Monissa tehtävissä Jarkko käytti kympin kautta etenemistä kuten 82-4=78 tai 47+6=53. Kaiken kaikkiaan Jarkko oli edistynyt toisena kouluvuotenaan paljon. Hänellä oli käytössä iso joukko hyvin erilaisia strategioita, virheitä myös tuli aluksi paljon.

Parillisten lukujen luettelu sujui, mutta parittomat vaihtuivat vieläkin parillisiksi:

- *1,3,5,7,10,12,14,16,18,20 (vaihtui parillisiksi)*
- *20,18,16,15 eikä kun 14,13 ei kun 14,12,10,8,6,4,2 (epävarmasti)*

Jarkon lukujonotaidot olivat siis kehittyneet, kun ne vielä ensimmäisellä luokalla olivat aika heikkoja. Jarkko suhtautui matematiikkaan myönteisesti:

- *Tykkäätkö matematiikasta?*
- *matikasta ja käsitöistä*

Hiukan paremmin kuin kaksi edellistä oppilasta selvisivät testeissä Paavo ja Harri. Syksyn matematiikan kokeessa heidän pistemääränsä olivat Paavolla 19/28 ja 21/28 pistettä ja Harrilla 22/25 ja 25/28 pistettä. Kuitenkin hekin päätyivät käyttämään pääasiassa lukusanojen luettelemisstrategiaa. Seuraavassa Harrin menestymisestä eri testeissä:

Harri:

Harrille lukujen 1-20 luetteleminen etu- ja takaperin oli helppoa syyskuun 2003 mittauksessa. Kahden välein luetteleminenkin onnistui vaikka hitaasti. Yhteen- ja vähennyslaskuissa Harrilla oli käytössä vain lukujen luettelemiseen perustuvat strategiat.

- *6+4*
- *kymppi*
- *osaatko sanoa, miten sen laskit?*
- *en*
- *käytätkö sormia, ajatteletko mielessäsi?*
- *ajattelin*
- *millä tavalla, lähdetkö 1:stä vai lähdetkö 6:sat?*
- *6:sta*
- *ja miten sitten laskit?*
- *6+4 eiku 6,7,8,9 ja 10*
- *pidät mielessäsi, että 4 lasket lisää?*
- *niin*

Suuremmilla luvuilla, kuten 8+8, laskut eivät vielä onnistuneet. Kuitenkin palikoiden avulla Harri pystyi laskemaan 15-7=8 ja 20-15=5. Jälkimmäisessä hän laski 15 palikkaa aloittaen ykkösestä sekä vastauksen viisi palikkaa aloittaen ensimmäisestä palikasta. Vähennyslaskut olivat ylipäätään vaikeampia kuin yhteenlaskut. Harrin mielestä matematiikka oli kivaa.

Harrin oli aika vaikea selittää laskustrategioitaan. Tammikuun mittauksessa näytti kuitenkin siltä, että ositteluun perustuvat strategiat olivat kehittyneet. Esim. laskun 9+6=15 Harri purki auki muotoon 9+5=14 ja14+1=15.

- *9+6*
- *15 (pieni tauko)*
- *osaatko selittää, miten laskit?*
- *en*
- *yritä, se on 15, mutta miten?*
- *(pitkä tauko)*
- *sano vaan rohkeasti*
- *9+6 on 14 plus 1 on 15*

Laskun 8+8=16 Harri perusteli laskulla 8+7+1=16. Seuraavan laskun 7+7 vastauksen hän poimi edellisestä vähentäen 16-2=14. Sanallisten tehtävien 6+4 laskun hän muutti muotoon 5+5. Vähennyslaskut sujuivat vähän syksyä paremmin, mutta virheitä tuli vielä, esim. 12-5=6 ja 20-15=16.

Harri piti edelleen matematiikasta. Se oli Harrin mielestä joskus helppoa ja joskus vaikeaa.

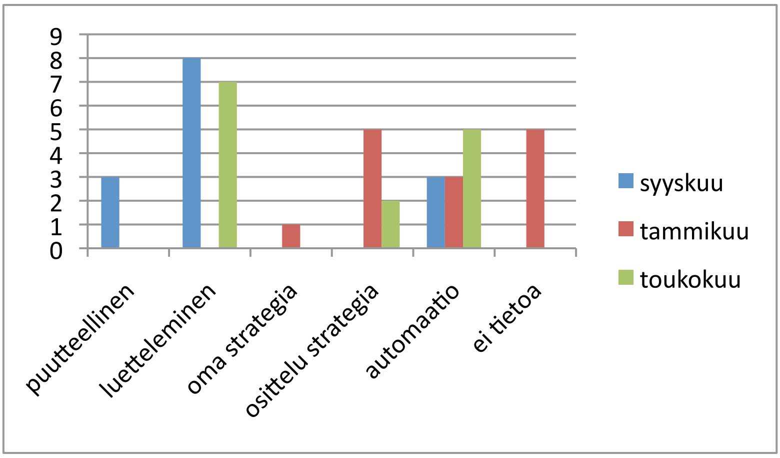
Toukokuussa Harrin laskustrategiat olivat kehittyneet, vaikka hän useimmiten turvautuikin lukusanojen luettelemisstrategiaan. Niinpä hän muisti ulkoa 7+7 ja osasi helposti sellaiset laskut kuin 20-15 , 20-19, 32+10 tai 75-20. Toisaalta luettelemisstrategia aiheutti virheitä, kuten 12-5=8 tai 15-7=9.

- *12-5*
- *8*
- *miten laskit?*
- *päässä kai*
- *mutta luetteletko mielessäsi*
- *joo*

Näissä Harri aloittanee lukujen luettelemisen 12:sta ja 15:sta. Erikoisin virhe oli 2. luokan testin lasku 47+6=79. Se on selitettävissä siten, että Harri käänsi ensin luvun 47 luvuksi 74 ja aloitti sitten luettelemaan luvut 74,75,76,77,78,79 tarkatessaan samalla kuusi lukua eteenpäin. Kaiken kaikkiaan Harri oli edistynyt vähennyslaskuissa, jotka vielä tammikuussa tuottivat hankaluuksia ja hän myös hahmotti koko lukualueen paremmin. Syksystä alkaen edistys olikin aivan huima, mutta silti Harri pysyi luettelemisstrategian käyttäjänä. Kevään matematiikan kokeen tulos oli Harrilla 21/28 pistettä.

Seuraavassa esitetään Harrin käyttämät strategiat eri mittauksissa. Tammikuun mittauksessa on huomioitava, että Harri ei osannut selittää käyttämiään strategioita kovin hyvin ja toisaalta osa tehtävistä on luokiteltu ositteluun perustuviksi, vaikka kyseessä on todennäköisemmin vielä luettelemiseen perustuva strategia, jossa yhteenlaskettava luku on pilkottu pienempiin osiin.

Harrin strategiat eri mittauksissa:



Harri vuoden kuluttua 2. luokan keväällä:

Harri oli kehittänyt ositteluun perustuvia strategioita. Pienillä luvuilla hän usein vielä käytti lukusanojen luettelemisstrategiaa, mutta se sujui nopeasti ja vastaukset löytyivätkin melkein heti. Suuremmat luvutkin olivat hyvin hallussa esim. 820-40 ja 750-125 onnistuivat helposti. Harri oli mielestäni strategioiden kolmannessa kategoriassa, mutta oli hyvää vauhtia matkalla neljänteen tehokkaimpien strategioiden kategoriaan. Harri myös piti matematiikasta, vaikka se oli välillä vaikeaakin.

Lukujen luettelu sujui erinomaisesti:

- *1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21 (helposti)*
- *20,18,16,…,4,2,0 (helposti)*

- *11+__=30*
- *19*
- *miten saat selville?*
- *sillee, että tähän tulee 10 ja jos tämä 1 olisi pois, siihen pitäisi saada 1 vielä tuohon ja sitten tähän 9 ja tähän 1*
- *joo*

- *42-14, vai onkohan se vaikea?*
- *28*
- *hienosti laskit, miten?*
- *10 kun vähennetään 40:ään jää 30, 4-2 siinä on 0, vähensin vielä siitä 30:stä 2*

- *43+25*
- *68*
- *miten laskit?*
- *20 lisää 40, siitä tulee 60, sitten 5+3*

Näissä laskuissa Harrilla oli käytössä Varol & Farranin (2007) mukainen 1010 - strategia, jossa ensin lasketaan täysillä kympeillä ja sitten lasketaan ykköset. Tässä tutkimuksessa lasken nämä strategiat kuuluviksi ositteluun perustuviin strategioihin.

Seppo ja Matti olivat oppilaita, jotka omaksuivat jo heti syksyllä tehokkaat ositteluun perustuvat strategiat. Heidän matematiikan kokeen pistemääränsä olivat Sepolla 25/28 ja 23/28 pistettä ja Matilla 26/28 ja 27/28 pistettä. Seuraavassa Sepon osaamisesta eri testeissä:

Seppo:

Sepolle lukujen 1–20 luetteleminen syyskuun 2003 mittauksessa oli helppoa, mutta yllättäen parittomien lukujen luetteleminen ei onnistunut. Parillistenkin luetteleminen oli aika hidasta. Laskustrategioista oli pääasiassa käytössä lukusanojen luetteleminen, mutta se oli Sepolle helppoa. Niinpä hän laski palikoilla 4+3=7, 6+4=10, 9+6=15 ja 8+8=16. Hän aloitti laskemaan palikkajonoja aina ensimmäisestä palikasta.

Toisaalta hänelle oli heti selvää, että 6 ja 4 palikkaa yhdessä muodostivat kympin.

- *6+4*
- *10 (yhdistää palikkasauvat ja laskee)*
- *miten laskit sen?*
- *tällee, laskin, kun otin 6 ja sit otin 5 (siirtää 6:n sauvasta 1:n palikan jäljelle jääneeseen 4:n palan sauvaan)*
- *saman tien tiesit, et se on 5 (ei tarvinnut laskea 5:tä alusta!)*
- *joo*

Hän myös oivalsi, että jos 8+8=16 niin seuraava lasku 7+7 on sama kuin 16-2 eli 14. Laskut 12-5 ja 15-8 hän laski mielessään luettelemalla lukuja alaspäin ja päätyen oikeaan vastaukseen. Laskut 20-15=5 ja 20-19=1 olivat Sepolle helppoja, hänellä oli selkeä ymmärrys kympeistä ja viitosista. Sepon mielestä laskeminen oli kivaa ja se voi olla joskus aika vaikeaa.

Tammikuun mittauksessa lukujen luetteleminen oli Sepolle helppoa, kuitenkin parittomien lukujen luetteleminen vaati hieman miettimistä. Yhteen- ja vähennyslaskustrategiat olivat kehittyneet todella paljon. Niinpä osa laskuista oli jo automaation tasolla ts. sanoen Seppo muisti ne ulkoa. tällaisia laskuja olivat mm. 2+2, 6+4, 8+8, 7+7, 4-4 ja 10-1.

- *8+8*
- *16 (heti)*
- *miksi?*
- *en mie osaa selittää*
- *yritä*
- *no sillee tuttu lasku*
- *niin*

Kymmenylityksissä 9+6, 12-5 ja 15-7 Sepolla oli käytössä tehokkaat ositttelustrategiat. Esim. 12-5 laskussa hän selitti: ”*tos kun lähtee 2, niin kympistä vielä 3*” tai laskussa 15-7: ”*toi 5 lähtee pois, sitten lähtee vielä 2*”. Syksyn tapaan 20-15 ja 20-19 olivat aivan selviä Sepolle. Matematiikka oli edelleen kivaa, kun se oli niin helppoa.

Toukokuussa Sepon laskemisessa oli osittelun ja automaation osuus edelleen kasvanut:

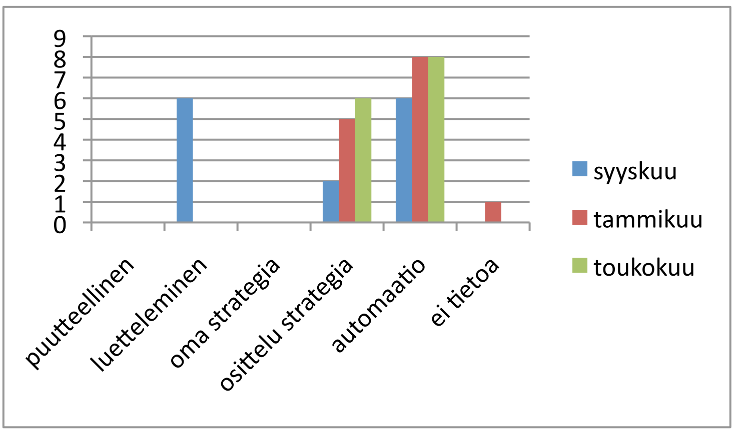
- *8+8*
- *16 (välittömästi)*
- *miten laskit?*
- *en tiedä*
- *sano vaan, muistitko ulkoa vai siirsitkö jotain?*
- *muistin ulkoa*

Esim. laskut 47+6 ja 82-4 hän laski helposti ositellen kympin kautta, mutta 55-9 meni pienen miettimisen jälkeen väärin 44:ksi.

- *47+6*
- *53*
- *miten laskit?*
- *tost otin sen 3 tohon yhteen (näyttää numeroita)*

Seppo piti edelleen matematiikasta ja laskut olisivat hänen mielestään saaneet olla vähän vaikeampiakin. Kevään matematiikan kokeen pistemäärä oli Sepolla 26/28 pistettä.

Sepon strategiat eri mittauksissa:



7.5.2 Toisen luokan oppilaiden sijoittuminen eri oppimispoluille.

Riina ja Merja olivat kaksi toisen luokan oppilasta, jotka pysyivät lukusanojen luettelemisstrategian käyttäjinä kaikissa kolmessa mittauksessa. Heidän matematiikan koearvosananansa olivat syksyllä Riinalla 11/28 ja 14/28 pistettä ja Merjalla

15/28 ja 6/28 pistettä. Seuraavassa analyysiä Riinan suoriutumisesta eri mittauksissa:

Riina:

Riinalla oli syyskuussa 2003 käytössä lähes pelkästään lukusanojen luettelemiseen perustuva laskustrategia. Lukujonotaidot olivat hänellä varsin hyvät, mutta parittomien lukujen luetteleminen vaihtui parillisten lukujen luettelemiseksi. Alle 20 olevilla luvuilla hän laski lukusanoja luettelemalla strategiaa käyttäen melko sujuvasti ja oikein laskuja, mutta suuremmilla luvuilla tehtävät tuntuvat ylivoimaisilta. Silti esimerkiksi tehtävässä 20-15 hän ensin muisti vastauksen olevan 4, mutta sitten palikoilla laskien onnistui saamaan vastauksen 5. Laskua 20-19 hän ei osannut ilman palikoita. Hän siis laski kymppisauvan jälkeen luetellen palikat 19 asti ja sitten osasi sanoa vastauksen olevan yksi. Lukusanoja luettelemalla laskien tulee paljon virheitä. Niinpä Riina laski 47+6=52, 82-4=79, 55-9=47 ja 32+10=41. Laskusta 75-20 Riina totesi: *”ei näytä helpolta, 62 tai 61, mie päässä sillee vähensin”.*

Riinan mielestä matematiikka on vähän tylsää. Tylsiä ovat mm. päässälaskut ja tarkistussanat kirjan tehtävissä, hauskoja ovat tehtävät, joissa yhdistellään numerot viivalla kuvaksi.

- *6+4*
- *(toistaa) 6+4, (laskee sormilla) 10*
- *joo, miten laskit sen? saat laskea sormilla, jos haluat*
- *no, kato täältä ko lisään 4:n, sittenhän se on 10 (näyttää 6 sormea ja 4 sormea)*

- *20-19*
- *oho, nyt alkaa vähäsen helpottaa ehkä*
- *no*
- *ootas (laskee 10 palikkaa ja toisesta palikkasauvasta 9, miettii hetken ja vastaa) yks*
- *joo*

Tammikuun 2004 mittauksessa Riina jatkoi lukusanojen luetteleminen strategian käyttöä. Myös lukujonotaidoissa parittomien lukujen luetteleminen vaihtui parillisiksi. Hänen laskustrategiansa eivät siis olleet kehittyneet juuri ollenkaan. Niinpä lasku 20-15 oli ylivoimainen, laskusta 20-15 Riina arvasi vastaukseksi ensin 10, sitten 13 ja laskusta 15+15 hän laski sormilla vastaukseksi 35. Laskun 32+10 Riina laski oikein sormia apuna käyttäen. Laskussa 75-20 oli osittelu käytössä kun Riina laski 7-5=2 ja pienen hapuilun jälkeen päätyi oikeaan vastaukseen 55. Riina laski myös väärin 82-4=79 ja 55-9=44.

- *75-20*
- *nyt vasta tuli vaikea*
- *59*
- *miten laskit?*
- *mie laskin 5-0 ja 7-2*

- *ja paljos se sitten oli?*
- *55, vissiin, niin ensin oli väärin pikkasen*

Tässä esimerkissä ensimmäinen väärä vastaus voi myös olla seurausta laskuista 5-0=5 ja 7+2=9, koska yhteen- ja vähennyslaskut usein sekoittuvat mielessä keskenään.

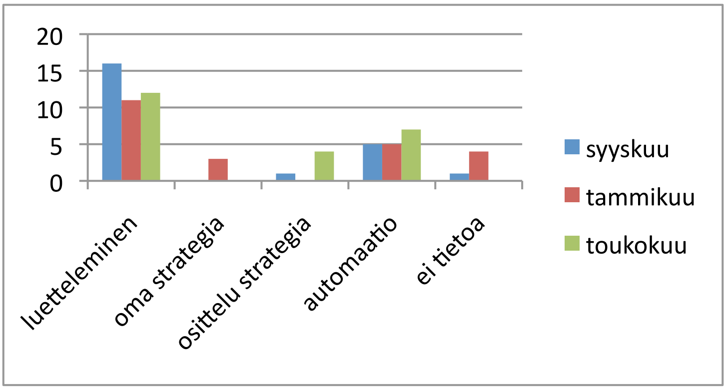
- *15+15*
- *(laskee sormilla) 35*
- *paljonko?*
- *35*
- *miten laskit, luettelitko niitä lukuja?*
- *joo (naurahtaa)*
- *etkö muuten osaa laskea?*
- *en, se on niin vaikeeta*

Toukokuussa 2004 Riina jatkoi lukusanojen luettelemiseen perustuvien strategioiden käyttöä. Hän myös käytti mielellään sormia apuna laskiessaan. Laskut 8+8 ja 7+7 hän osasi ulkoa. Luettelemalla on hankala laskea isompia lukuja yhteen- tai vähennyslaskuissa, niinpä 55-9 oli hankala ja Riina sanoi vastaukseksi 44 tai 45 ja myöhemmin 47. Laskussa 20-15 Riina laski luettelemalla jopa laskiessaan ensin 10 pois 20:stä ja sitten vielä laskiessaan 5 pois kymmenestä. Kevään matematiikan kokeiden pistemäärät olivat Riinalla 20/28 21/28 pistettä. Ne eivät siis olleet mitenkään huonot. Myös 'luettelemalla lukusanoja' strategialla voi tavallisessa matematiikan kokeessa suoriutua suhteellisen hyvin, jos on tarpeeksi aikaa kokeen tekemiseen.

- *47+6*
- *apua, 53*
- *miten laskit?*
- *päässä jotenkin*
- *sanotko, mitä ajattelit siinä*
- *3 kertaa 6 tai tällee se on 3 ja 3*
- *no miten laskit?*
- *no tällee 48,49,50,51,52,53*

- *32+10*
- *hoh hoh 42*
- *miten sait sen selville?*
- *koska tiesin ihan helposti*
- *tiesitkö?*

Riinan strategiat eri mittauksissa:



Riina kolmannen luokan keväällä 2005:

Riina laski edelleen lukusanoja luettelemalla, vaikka oli siis kolmannella luokalla. Tutuimmissa tehtävissä kymppien avulla laskien hän osasi päätellä vastauksen. Allekkain laskuissa tuli yksi virhe ja esim. tehtävässä 80-35 hän sanoi vastaukseksi 55 eli hän oli oppinut vähennyslaskun algoritmin väärin.

- *47+6*
- *53*
- *miten laskit?*
- *48,49,50,51,52,53*

- *82-4*
- *78*
- *miten laskit? sanoit mielessäsi lukuja vai?*
- *sillee, että otin 2 pois ja sitten vielä 80:stä 2 pois*

- *15+15*
- *se taitaa olla 30*
- *onko? mistä tiedät?*
- *1+1=2 ja 5+5=10*

- *11+___=30*
- *tässä pitää käyttää sormia tai palikoita (laskee nopeasti puoliääneen 11,…,27,28,29) vastaa 9*
- *11+9=30? onko se 30, jos lasket 9 lisää 11:ta? siitä tulee?*
- *ai niin mä laskin väärin, 19*

Leena ja Milla olivat kaksi oppilasta, joilla oli paljon strategioita, jotka olen nimennyt nimellä ’omat strategiat’. Lisäksi heillä oli käytössä myös ositteluun perustuvia strategioita. Heidän matematiikan koearvosanansa olivat syksyllä Leenalla 3/28 ja 17/28 pistettä ja Millalla 18/28 ja 21/18 pistettä. Seuraavassa Millan suoritukset eri mittauksissa:

Milla:

Millalla oli ositteluun perustuvat strategiat syyskuun 2003 mittauksessa käytössä, esim. helpon laskun 6+4 hän laski muuttaen sen 5+5 muotoon. Hän ajatteli hyvin konkreettisesti siirtäessään toisesta yhteenlaskettavasta osan toiseen, esim. 9+6 hän konkreettisesti mielessään siirsi 6:sta ykkösen 9:ään. Isommilla luvuilla tuli hankaluuksia, esim. 20-15 vaati hyvin pitkän ajan, vaikka olikin oikein.

- *20-15*
- *mhyy (tauko) 5*
- *joo, osaatko sanoa, miten saat sen?*
- *no 20:stä vähennät ekan 10:iin ja sitten vasta 5:sen*
- *hyvä*

Paljon tuli kuitenkin virheitä. kuten 20-19=6, ositellen ”*ensin vähennän kympin, sitten 9:n*”. Samoin Milla laski väärin laskun 82-4=76 taas ositellen ”*ekaks vähennän 2 ja sitten 2*”. Tässä tapauksessa ensimmäisen vaiheen 82-2=80 jälkeen vähentäjäksi on tainnut ilmaantua uudelleen 4 eli 80-4=76. Lasku 47+6=53 meni oikein ja siinä Milla käytti apuna mielessään laskua 7+6=13. Seuraavat laskut menivät myös väärin 15+15=20, koska 5+5=10, ja 75-20 =64 ilman pätevää selitystä.

Kysyttäessä, pitääkö Milla matematiikasta, Milla sanoi pitävänsä erityisesti värityslaskuista. Välillä matematiikka oli ikävää, kun tuli liian vaikeita laskuja.

Tammikuun 2004 mittauksessa Milla laski huomattavasti enemmän oikein laskuja. Automatisoitumisen aste ei kuitenkaan ollut noussut. Laskut 32+10, 15+15 ja 75-20 sujuivat nyt helposti. Joissakin laskuissa Milla käytti mielessään allekkain laskua apuna, ja siitä aiheutui virheitä. Esim. 20-19=9 allekkain laskien sekä 82-4=77 samoin mielessä allekkain laskien. Kuitenkin samalla tavalla Milla laski 20-15=5 oikein, vaikka selitys ei ollutkaan looginen.

- *20-15*
- *5*
- *miksi?*
- *mie vähennän tästä 2:sta tuon 1:n ja nollaa ei pysty vähentämään 5:sta ni mie tiiän että se on 15 ni sitten otetaan siitä*

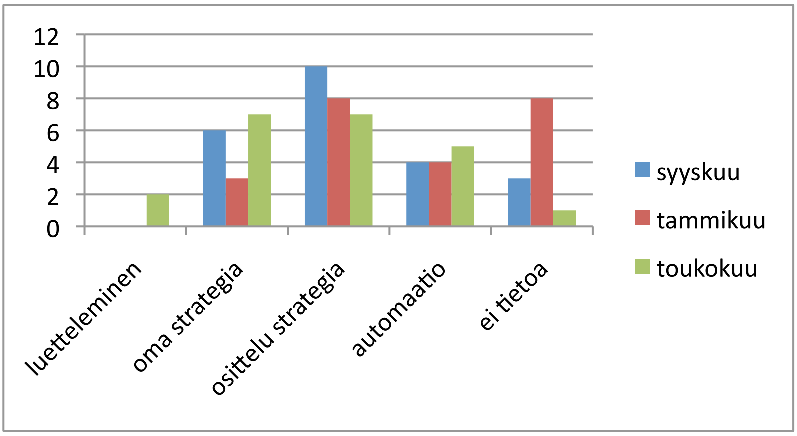
Toukokuussa Milla ei ollut kehittänyt itselleen tehokkaimpia ositteluun perustuvia strategioita, vaikka osittelu olikin hänellä jossain määrin käytössä. Monissa laskuissa hän turvautui omaan erityiseen strategiaansa esim. vähennyslaskuissa vähentää pienen osan kerrallaan, esim. 55-9 laskussa hän ensin vähentää 3 ja sitten jatkoi siitä osissa vähentämistään.

- *55-9*
- *(miettii) 46*
- *miten laskit?*
- *ihan silleen, että yritän ottaa pois, se ois paljon helpompi laskee*
- *miten ensin?*
- *että tästä otetaan vaikka 3 pois, sitten ne miinustan, kymmeneen ja viiteen, sitten taas joku pois*

- *silleen osissa?*
- *niin*

Tämä strategia on aika hidas ja työläs. Samoin hän turvautui monissa laskuissa allekkain laskun strategiaan mielessään ja hänelle tuntui olevan helpompi laskea jotkut vähennyslaskut mielessään lainaten kympeistä. Kaiken kaikkiaan Milla osasi kyllä laskea laskut oikein, mutta ne olivat työläitä ja aikaa vieviä. Hänestä myös matematiikka tuntui välillä vaikealta. Kevään matematiikan koenumerot olivat Millalla 22/28 ja 22/28 pistettä.

Millan strategiat eri mittauksissa:



Milla kolmannen luokan keväällä 2005:

Millan ositteluun perustuvat strategiat olivat kehittyneet paljon 2.luokasta. Hän laski useimmat tehtävät isoillakin luvuilla helposti oikein. Mielenkiintoista oli se, että Milla laski usein laskut mielessään allekkain, esim. sellaiset laskut kuin 43+25, 80-35, 820-40 tai jopa 750-125 Milla laski näkemällä ne allekkain laskuna. Sen sijaan laskusta 42-14 Milla totesi tällaisten laskujen olevan hänelle vaikeita, eikä sen laskeminen onnistunutkaan. Lukualue 0–1000 oli Millalla varsin hyvin hallinnassa.

- *47+6*
- *47+6 on 53*
- *miten laskit sen?*
- *no se on helppo ihan tavalleen niiku ekan laskee nämä tälleen (peittää laskusta 4:n)*
- *paljos siitä tulee 7+6?*
- *13, sitten ajattelee sen sillee mielessä*

- *55-9*
- *nelkyt, 44*

- *joo, miten laskit?*
- *se on jo vähän helpompaa, jos tietää, että 9:stä vähennetään 5, siitä tulee 4, sitten vaan laittaa sen toisen kympin mikä on vaan pienemmäksi*

Edellisestä esimerkistä näkee, että varsin yleinen on virhe, jossa vähenevä ja vähentävä vaihtavat paikkaa. Sen sijaan mielenkiintoinen on tapa laskea mielessä allekkain:

- *15+15*
- *30 (heti)*
- *miten laskit?*
- *no se on pluslasku ja jos joku ei osaa, voi laskea vaikka allekkain*
- *sanotko mielessäsi allekkain?*
- *mie tykkään nykyään allekkain laskusta*

- *43+25*
- *68 (nopeasti)*
- *laskitko allekkain?*
- *niin*
- *helposti?*
- *niin*

Allekkain laskut menivät helposti ja oikein. Laskuissa Milla aivan ilmeisesti käytti myös muistinumeroita.

- *entä kun kävit lainaamaan heti vasemmalta, jos ei tarvitsisikaan lainata, huomaatko sen?*
- *no, joo, ekaks kannattaa kumminkii kattoa täältä, jos siellä olisi niin iso luku, että ei tarvi lainata*

Niina ja Maisa olivat esimerkkejä oppilaista, joiden omat strategiat olivat vaihtuneet osittelun käyttöön etenkin tultaessa toukokuun mittaukseen. Syksyn matematiikan koenumerot olivat heillä Niinalla 24/28 ja 26/28 pistettä ja Maisalla 21/28 ja 20/28 pistettä. Heistä Niinan suorituksista seuraavassa:

Niina:

Niinalle lukujonot olivat selkeitä. Virhe tuli kuitenkin alaspäin laskettavissa parillisissa luvuissa, jotka vaihtuivat parittomiksi. Laskustrategioista hänellä oli käytössä ositteluun perustuvat tehokkaat strategiat. Esim. niinkin yksinkertaisen laskun kuin 4+3 Niina laski 4+2=6, siis 4+3=7.

- *4+3*
- *7*
- *miten sie laskit?*
- *sekin on helppo*
- *osaatko silti selittää, tarviiko sinun mitään laskea vai muistatko sen ulkoa?*
- *no mietin päässä ja ulkoakin, en mie tiiä!*

- *osaatko sinä selittää?*
- *mie tiiän ulkoa ainakin, et 4+2 on 6 ni sillo tulee 7 kun vielä yksi lasketaan lisää*
- *hyvä*

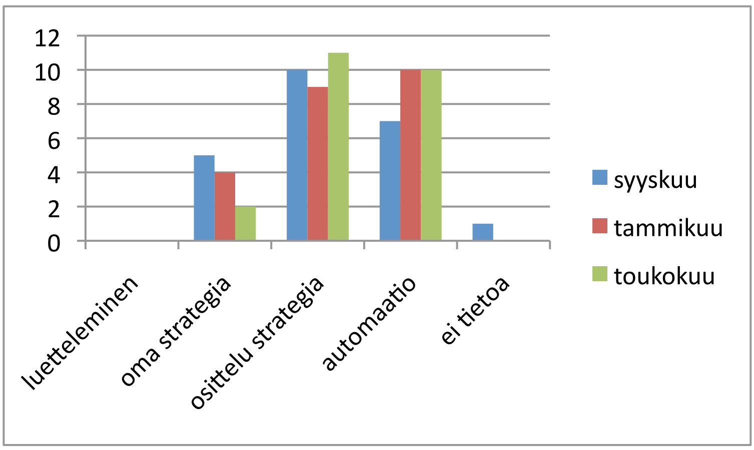
Osittain hän käytti omia strategioita, esim. 12-5=7, koska 10-5=5 ja 5+2=7 tai 15-7=8, koska 15-10=5 ja 5+2=7 eli 5+3=8. Niina suoriutui tehtävistä nopeasti ja varmasti. Niinan mielestä matematiikka oli kivaa.

Tammikuun mittauksessa Niinan laskunopeus oli vielä suurempi. Hänen laskujen automatisointi oli myös kasvanut. Edelleen hän käytti joissakin laskuissa omia kehittämiään strategioita. Esimerkiksi sama 12-5=7, koska 10-5=5 ja 5+2=7. Tai tehtävässä 47+6 Niina laski ensin 50+6=56, sitten 56-3=53. Tehtävässä 55-9 Niina laski ensin 50-9=41, sitten 41+5=46. Tehtävät 32+10 ja 75-20 Niina laski mielessään allekkain (siis laskettavaa olivat 3+1 ja jälkimmäisessä 7-2).

- *32+10*
- *oliks 42*
- *miten laskit?*
- *no mie nyt laskin 3+1 tuosta vaan*
- *joo*

Toukokuussa Niina laski edelleen ositellen käyttäen tutuissa laskuissa, kuten 12-5 omaa strategiaansa 10-5+2, mutta isommilla luvuilla Niina oli siirtynyt tehokkaampaan kympin kautta laskemiseen. Kaikki laskut olivat Niinalle helppoja. Kevään matematiikan koearvosanat olivat Niinalla 25/28 ja 20/28.

Niinan strategiat eri mittauksissa:



Hanna ja Kaisa olivat kaksi oppilasta, joilla syyskuun mittauksessa oli joitain ’omia strategioita’, mutta jotka jo tammikuun mittauksessa olivat siirtyneet pääosin osittelustrategian käyttöön. Heidän syksyn matematiikan koenumeronsa olivat

Hannalla 22/28 ja 22/28 pistettä ja Kaisalla17,5/28 ja 15/28 pistettä. Heistä valitsin tähän esimerkiksi Hannan.

Hanna:

Hanna käytti vaihtelevasti eri strategioita laskuissaan. Hän mm. käytti kymppiä hyväksi esimerkiksi laskuissa 9+6 seuraavasti: koska 10+6=16, on 9+6=15. Samoin10+8=18, niin 9+8=17 ja siksi 8+8=16. Tämä oli siis strategia, jonka olen luokitellut ’omiin strategioihin’.

- *mitä on 8+8*
- *16 (heti)*
- *miten laskit?*
- *sillee, että 10:een lisää 8 on 18, 9:ään lisää 8:n on 17 ja 8:aan lisää 8 on 16*
- *tämähän on hieno tapa eli sinä lisäät ensin kymppiin tuon ja sitten tulet sieltä taaksepäin*
- *niin*

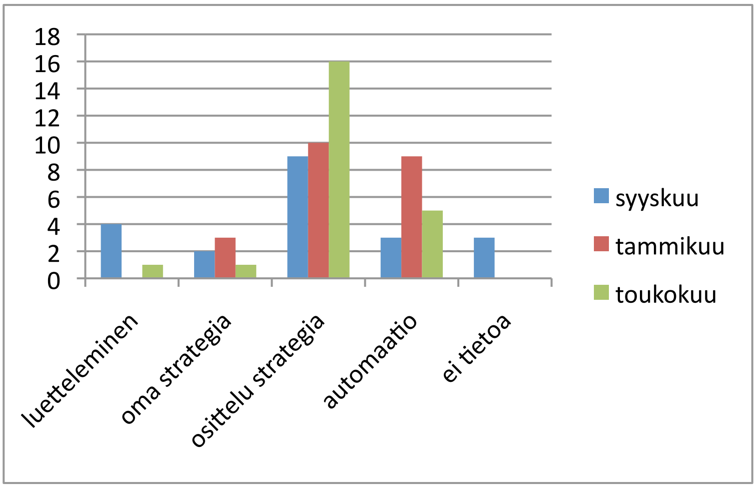
Laskussa 20-19 Hanna vähensi ensin 10 ja sitten 9 ja käytti mielessään luettelemisstrategiaa. Laskussa 82-4 hän vähensi ensin kaksi ja sitten vielä kaksi ja päätyi virheelliseen vastaukseen 77.

Hannan mielestä matematiikka on kivaa eikä tunnu vaikealta. Tammikuun mittauksessa Hanna käytti huomattavasti enemmän tehokasta ositteluun perustuvaa strategiaa. Hän ei itse asiassa käyttänyt luettelemiseen perustuvia strategioita enää lainkaan. Virheitä hän myös teki paljon vähemmän, kuitenkin Hanna laski 15+15 edelleen virheellisesti 25:ksi strategialla ”10+10=20 ja sitten 5”.

- *12-5*
- *7*
- *miten laskit?*
- *no on 12-2 ja sitten 3 pois*
- *hyvä*

Toukokuussa Hanna käytti edelleen tehokkaita ositteluun perustuvia strategioita ja eteni usein kympin kautta. Nyt myös kaikki laskut menivät oikein. Vain pieni virhe lipsahti haastattelun alussa, kun piti mainita luku, joka on kaksi pienempi kuin 90, niin Hanna sanoi sen olevan 89. Kevään matematiikan kokeista Hanna sai 22/28 ja 21,5/28 pistettä

Hannan strategiat eri mittauksissa:



Lopuksi **Juha, Liisa ja Pekka** olivat esimerkkejä oppilaista jotka käyttivät tehokkaimpia ositteluun perustuvia strategioita jo ensimmäisessä syyskuun mittauksessa. Heille yhteen- ja vähennyslaskut olivat todella helppoja. Heidän matematiikan koearvosanat syksyllä olivat: Juha 25,5/28 ja 27/28 pistettä, Liisa 23/28 ja 27/28 pistettä sekä Pekka 24/28 ja 23/28 pistettä. Esimerkkinä olkoon Liisa:

Liisa:

Liisalla oli jo syksyllä käytössä tehokkaat ositteluun perustuvat strategiat ja monet laskut olivat niin tuttuja, että automaation aste oli melko korkea. Vaikka suurin osa laskuista sujui vaivatta, tuli mukaan yllättäviä virheitä. Laskusta 55-9 Liisa sai vastauksen 44. Laskusta 15+15 Liisa yhdisteli vastaukseksi 23!

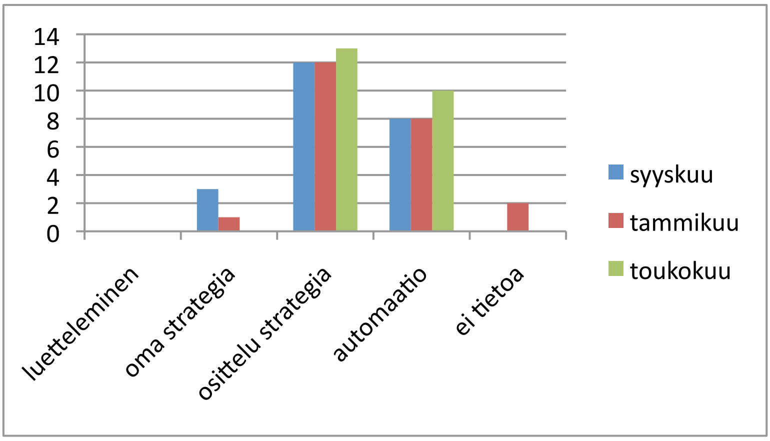
- *47+6*
- *53*
- *miten laskit sen?*
- *no silleen niiku, että noi lisätään yhteen, nää niiku kympit täyteen*
- *selitä vielä tarkemmin*
- *kun tost otetaan 3 tosta 6:sta, siitä tulee kymppi täyteen ja sitten 3 vielä*
- *hyvä*

Liisa kertoi pitävänsä semmoisista vaikeista laskuista. ”Miinuslaskut olivat tylsiä, kun ne on niin helppoja. Matematiikka on kiva oppiaine.”

Tammikuun mittauksessa tilanne oli pysynyt melko samana. Em. 15+15 lasku oli nyt helppo, mutta 55-9 meni edelleen väärin 44:ksi. Matematiikka oli Liisan mielestä edelleen kivaa ja helppoa.

Toukokuun mittauksessa automaation aste oli noussut ja lopuissa oli käytössä tehokkaimmat ositteluun perustuvat strategiat. Liisa laski vain yhden laskun väärin, nimittäin 75-20, josta hän vähensi kympit väärin ja sai vastauksen 45. Kaikki muut tehtävät sujuivat todella helposti. Liisan kevään matematiikan arvosanat olivat 19/28 ja 23,5/28 pistettä.

Liisan strategiat eri mittauksissa:



8 Tutkimuksen luotettavuudesta

Tutkimusmenetelmien luotettavuutta käsitellään usein validiteetin ja reliabiliteetin käsittein. Tällöin validiteetilla tarkoitetaan sitä, että tutkitaan sitä, mitä on luvattu ja reliabiliteetilla sitä, että tutkimustulokset on toistettavissa. (Tuomi & Sarajärvi 2009,136.) Nämä käsitteet ovat syntyneet määrällisen tutkimuksen piirissä, eivätkä ne sellaisinaan sovellu laadullisen tutkimuksen luotettavuuden kriteereiksi.

Laadullinen tutkimus voi luonteeltaan olla hyvin erilaista. Niinpä laadullisen tutkimuksen piiristä löytyy erilaisia käsityksiä tutkimuksen luotettavuuteen liittyvistä kysymyksistä (Tuomi & Sarajärvi 2009, 134). Usein luotettavuuskeskustelussa esiin nousee kysymys totuudesta ja objektiivisesta tiedosta. Ne myös vaikuttavat siihen, miten luotettavuuskysymykseen suhtaudutaan. (Tuomi & Sarajärvi 2009.)

Puolimatka (2002a) uskoo, että laadullinen tutkimus menettää uskottavuuttaan, jos tutkijat eivät usko yhteiseen realistiseen totuusteoriaan. Fenomenografiaan kuitenkin kuuluu ihmisen ja maailman non-dualistinen luonne, käsitys siitä, että yksilö ja maailma ovat sisäisesti suhteessa toisiinsa. Ei ole olemassa kahta erillistä maailmaa, vaan vain yksi samanaikaisesti todellinen ja koettu maailma (Huusko & Paloniemi 2006, 164).

Koro-Ljungbergin (2005) mukaan ymmärrys ja tieto, jotka ohjaavat laadullista tutkimusta ja sen validiteetin määrittelyä, ovat situationaalisiin käsiteyhteyksiin ja olosuhteisiin perustuvia käsitteitä sekä diskursiivisia toimintoja. Siksi ei ole olemassa yhtä kannanottoa tai validiteetin määritelmää, joka toimisi kaikkien tutkijoiden viitekehyksenä. Validiteettitarkastelu on aina myös yhteydessä tutkimuksessa käytettyyn teoriaan, teoreettiseen viitekehykseen ja käytettyihin käsiteyhteyksiin. (Koro-Ljunberg 2005, 276.) Tässä tutkimuksessa se tarkoittaa sitä, että tutkimuksen kulku ja sen kuvaus sekä tulosten esittely pitää olla johdonmukaisesti esitetty ja siinä pitää käyttää samoja teoreettisia käsitteitä kuin tutkimuksen alussa on määritelty.

Laadullisen tutkimuksen luotettavuutta Guba ja Lincoln (1989) lähestyvät kolmesta eri lähtökohdasta, jotka ovat uskottavuus, hermeneuttisen prosessin luonne ja autenttisuuden kriteeri. Seuraavassa esittelen lyhyesti nämä kriteerit.

Uskottavuuden (trustworthines) osatekijöitä ovat *vastaavuus* (credibility), *siirrettävyys* (transferalibity), *pysyvyys* (dependability) ja *vahvistettavuus* (confirmability) (ks. myös Tuomi & Sarajärvi 2009, 138). Näistä *vastaavuus* vastaa määrällisen tutkimuksen sisäistä validiteettia. Sen sijaan, että keskityttäisiin 'todellisuuteen', on painopiste konstruktivistisessa tutkimuksessa siirretty siihen, miten hyvin tutkijan ja tutkittavien todellisuuskäsitykset käyvät yksiin. Sitä auttaa Guban ja Lincolnin (1989, 237) mukaan mm. se, että tutkija tarkkailee tutkittavaa kohdetta tarpeeksi pitkän ajan. Tässä tutkimuksessa tämä vaatimus toteutuu mielestäni hyvin, koska toimin tutkimuksen aikana myös oppilaideni opettajana.

Siirrettävyyden vaatimus on rinnakkainen määrällisen tutkimuksen ulkoisen validiteetin tai yleistämisen vaatimukselle. Se on laadullisen tutkimuksen kyseessä ollen kuitenkin aina suhteellista. Siirrettävyydellä tarkoitetaan sitä, että tulokset voidaan siirtää uuteen kontekstiin ja myös eri aikaan. Kuitenkin konstruktivistisessa tutkimuksessa tutkija ei määrittele tutkimuksen rajoja. Hän voi ainoastaan esitellä tutkimuksensa niin hyvin ja täydellisesti kuin mahdollista, ja sitten joku toinen tutkija voi soveltaa hänen saamiaan tuloksia omaan tutkimukseensa. (Guba & Lincoln 1989, 241–242.)

Tässä tutkimuksessa on esitelty melko pienen oppilasjoukon tapoja laskea yhteen- ja vähennyslaskuja (6 ensimmäisen luokan ja 11 toisen luokan oppilasta). Tulokset on pyritty esittämään selkeästi ja johdonmukaisesti esimerkkien avulla. Tällä on pyritty siihen, että lukija pystyisi seuraamaan oppilaiden ja heidän käyttämiensä laskustrategioiden kehitystä ja muutosta.

Pysyvyys on rinnakkainen määrällisen tutkimuksen reliabiliteetin kriteerille. Sillä tarkoitetaan siis sitä, pysyvätkö tulokset samoina eri aikoina tapahtuvissa mittauksissa. Mutta metodologiset muutokset ja rakenteiden muuttuminen sofistikoidummaksi ovat odotettuja ja leimaa antavia piirteitä laadullisessa tutkimuksessa. Ne pitää raportoida niin tarkasti, että ulkopuolinen lukija pystyy seuramaan niiden alkuperää. (Guba & Lincoln 1989, 242.) Tässä tutkimuksessa esitelty laskustrategioiden ilmiasu hahmottui vähitellen tulosten analysoinnin myötä. Ajallisesti luokittelin viimeisen toukokuun mittauksen tehtävät hivenen kahta ensimmäistä mittauksen luokittelua myöhemmin vasta silloin, kun laskustrategioiden nimet alkoivat olla jo selvillä.

Vahvistettavuutta voidaan verrata perinteisen tutkimuksen objektiivisuuden kriteeriin. Sillä tarkoitetaan sitä, että tutkimuksen tulokset ja niiden tulkinta ovat jäljitettävissä oikeaan kontekstiinsa eivätkä ole tutkijan oman mielikuvituksen heijastumaa. Konstruktivistisessa tutkimuksessa tämä tarkoittaa sitä, että tutkimuksen löydöt on jäljitettävissä itse aineistoon ja ne ovat eksplisiittisesti ja implisiittisesti luettavissa tutkimusraportista. (Guba & Lincoln 1989, 242–243.) Tämän tutkimuksen tulokset ovat johdonmukaisia teoriataustaan nähden ja siten *vahvistettavuuden* vaatimus toteutuu.

Luotettavuuden kriteereihin kuului myös hermeneuttinen prosessin luonne. Siihen kuuluu, että se kontrolloi omaa olemassaoloaan. Tutkimusdataa käydään yhä uudelleen läpi ja sitä voidaan täydentää kommentein, lisäyksin, korjauksin, laajennuksin jne. Julkinen tarkastelu ja tarkastelun hermeneuttinen luonne estävät tiedon vääristelyä. Sama pätee tutkijan ennakkoasenteisiin. Tutkijan on tuotava esille omat ennakkokäsityksensä ja niiden on kestettävä sama kritiikki kuin muidenkin mielipiteiden, jolloin ne eivät vaikuta tutkimuksen tuloksiin. (Guba & Lincoln 1989, 244.) Olen esitellyt omaa tutkimusprosessiani luvussa 5.5.2. Siitä käy ilmi, että tutkimusaineistoa analysoidessani tulosten kategoriat hahmottuivat vasta vähitellen. Samoin kategorioiden nimet muuttuivat. Esimerkiksi kategorian, jonka nimesin nimellä 'omat strategiat', nimi oli jossakin vaiheessa 'itse opitut strategiat'. Olen myös joutunut palaamaan tutkimusaineistooni aina uudestaan mm. etsiessäni parhaita laskuesimerkkejä, koska niitä on ollut tarjolla niin iso määrä.

Autenttisuuden kriteeri puolestaan edellyttää tutkimuksen rehellisyyttä. Se tarkoittaa, että erilaiset tutkimuksen rakenteet ja niiden taustalla mahdollisesti olevat arvojen rakenteet on tuotava esiin. Tutkijan on tiedostettava tutkimukseen osallistujien mahdollisesti erilaiset arvot, mahdolliset ristiriitatilanteet on selvitettävä. (Guba & Lincolon 1989; Guba & Lincoln 2005.) Tässä tutkimuksessa tutkimushenkilöinä olivat omat yhdysluokkani oppilaat, jotka aidosti kertoivat haastatteluissa omasta osaamisestaan ja käyttämistään laskustrategioista. Samoin olin itse aidosti kiinnostunut tutkimustehtävästä, joten mielestäni rehellisyyden vaatimus toteutuu tutkimuksessa hyvin.

Tietenkin se, että olin samaan aikaan sekä tutkija että opettaja, aiheuttaa myös joitakin ongelmia. En ehkä osannut olla niin puolueeton kuin ulkopuolinen tutkija olisi ollut. Minulle muodostui tietty ennakkokäsitys oppilaistani, ja se on saattanut vaikuttaa tulkintaani heidän tutkimustilanteessa esittämiinsä vastauksiin. Toisaalta luulen kuitenkin opettajana osanneeni tulkita oppilaiden vastaukset paremmin, siis sen, mitä he oikeasti sanomisillaan tarkoittivat. Useimmat analysoinnin kohteet, esimerkiksi käytetyt laskustrategiat, olivat hyvin usein myös helposti löydettävissä.

8.1 Fenomenografisen tutkimuksen luotettavuudesta

Fenomenografisessa tutkimuksessa analyysi ei ole niinkään mittaamista vaan uuden löytämistä (Marton 1994). Siinä tutkitaan ihmisten käsityksiä tutkittavasta ilmiöstä. Koska sama henkilö voi edustaa useampaa tapaa ymmärtää ilmiö, luokittelun kohteena eivät ole ihmiset. Analyysissä korostuu samankaltaisuudet ja toisaalta erot tavoissa ymmärtää jokin ilmiö. Fenomenografisen tutkimuksen päätuloksia on juuri se eri kategorioiden muodostama ulkoasu, joka kuvaa tutkittavaa ilmiötä. (Marton 1994; Booth 1992; Marton & Booth 1997; Huusko & Paloniemi 2006.)

Fenomenografisen tutkimuksen johtopäätökset esitetään siis kategorioina, jotka ovat muodostuneet, kun aineisto on luokiteltu sen sisältämien merkitysten perusteella. Nämä merkityskategoriat ovat Ahosen (1994, 154–155) mukaan valideja, jos ne ovat aitoja eli vastaavat tutkittavien tarkoittamia merkityksiä ja toisaalta jos ne ovat relevantteja tutkimuksen teorian kannalta.

Olen pyrkinyt varmistamaan merkityskategorioiden aitouden esittelemällä niistä kustakin riittävästi kokonaisia laskuesimerkkejä. Lisäksi testin tehtävien varsin suuri lukumäärä (1. luokalla 14 laskutehtävää ja 2. luokalla 23 laskutehtävää) takasivat sen, että merkityskategorioiden tehtävät toistuvat aina uudestaan. Toisaalta osaa tehtävistä en pystynyt luokittelemaan mihinkään kategoriaan, koska oppilas ei osannut tai ei ujoudeltaan halunnut selittää, miten tehtävän ratkaisi. Nämä tehtävät on luokiteltu ”ei tietoa” -luokkaan. Toisen luokan osalta näiden tehtävien osuus laski joka mittauksessa (syyskuu, tammikuu, toukokuu), mutta ensimmäisen luokan osalta niitä oli eniten tammikuun mittauksessa.

Ahosen (1994, 153) mukaan aineiston aitous riippuu tutkijan ja tutkittavien *intersubjektiivisesta yhteisymmärryksestä* (kursivointi Ahosen). Tässä tapauksessa luottamukseni ja toisaalta oppilaantuntemukseni perustui siihen, että toimin tutkimushenkilöideni opettajana. Oppilaiden ymmärtämisessä ja vastausten tulkinnassa auttoi se, että tunsin oppilaideni matemaattiset taidot jo matematiikan tunneilta.

Oppilaat suhtautuivat tutkimukseeni innostuneesti, mutta joitakin oppilaita testitilanne jännitti. Testi oli myös melko pitkä ja jotkut oppilaat väsyivät kysymysten paljouteen. Mielestäni he silti yrittivät parhaansa. Tein siis vuoden mittaan kolme mittausta ja kun rinnalla kulki normaali matematiikan opetus kokeineen sekä erityisopettajan testeineen, joku oppilaista ihmetteli kevätpuolella ainaisia kokeita. Kaiken kaikkiaan oppilaat selviytyvät testeistä hienosti.

Puhuimme samoilla käsitteillä, koska tunnillakin opettelimme samoja asioita. Joissakin haastattelun vaiheissa oli kyllä vaarana, että oppilas oppi vastaamaan halutulla tavalla. Meillä oli nimittäin tunnillakin käytössä käsite ”laskea kympin kautta” ja tämä sitten toistui joidenkin oppilaiden vastauksissa. Toisaalta se oli juuri tavoittelemamme tapa laskea tiettyjä laskuja, joten ilmaisua sopikin käyttää. Myös jotkut oppilaat kertoivat osaavansa reaktioistani päätellä, menikö lasku oikein vai väärin. Silti käytetyt strategiat tulivat mielestäni selkeästi esille useimmissa tapauksissa. Esimerkiksi yleensä on helppo erottaa, onko oppilaalla käytössä lukusanojen luettelemiseen vai ositteluun perustuva strategia.

Niinpä jaotteluni merkityskategorioissa: puutteelliset strategiat, lukusanojen luetteleminen, omat strategiat, ositteluun perustuvat strategiat ja automaatio, on mielestäni riittävän selkeä. Tarkoitan tällä sitä, että merkityskategoriat voidaan löytää, vaikka osa tehtävistä on vaikeampi luokitella niihin. Tässä auttaa myös luokiteltavien tehtävien lukumäärä.

Kategoriointini relevanssi eli teoreettinen merkityksellisyys perustuu siihen, että se tuntuu johdonmukaiselta teoriataustaan nähden. Muodostamani neljä eri kategoriaa sopivat hyvin esimerkiksi Piaget’n samoin kuin Fusonin lukukäsitteen kehittymisen malliin samoin kuin Fusonin yhteen- ja vähennyslaskun käsitteiden rakentumisen malliin. Verrattaessa luvussa 4.6. esitettyihin mentaalisten strategioiden malleihin (esimerkiksi Beishuizen 1998; Hartnett 2007; Varol & Farran 2007) on kategorisointini pelkistetympi. Tämä perustuu siihen, että olen kiinnostunut nimenomaan oppilaan kokonaisvaltaisesta lukukäsitteen ja yhteen- ja vähennyslaskujen strategioiden kehittymisestä.

Ongelmallisin määrittelemistäni kategorioista on kolmas kategoria ”omat strategiat”, ja siinä nimenomaan se, miten se eroaa neljännestä kategoriasta ”ositteluun perustuvat strategiat”. Kuitenkin perustelen sen olemassaoloa sen sisältämien laskustrategioiden mielenkiintoisuudella ja erikoisuudella. Ne poikkeavat esimerkiksi oppikirjoissa esitetyistä laskutavoista. Ahosen (1994, 127) mukaan fenomenografisessa tutkimuksessa tutkijaa kiinnostaakin merkitysten laadullinen erilaisuus eikä niiden määrä tai edustavuus tietyssä joukossa. Edelleen hänen mukaansa ”*marginaalinen ilmaisu paljastaa usein oleellisen teoreettisen ulottuvuuden tutkittavassa asiassa*” (Ahonen 1994, 127, kursivointi oma; ks myös Huusko & Paloniemi 2006). Näin haluan tässäkin tutkimuksessa uskoa. Kategoria ”omat strategiat” paljastaa jotakin olennaista siirtymässä ”lukusanojen luetteleminen” strategiasta ”ositteluun” perustuviin strategioihin.

Gröhnin (1992) mukaan fenomenografinen tutkimus ei ole kiinnostunut oppimisen määrästä, vaan sen laadullisista eroista. Tällöin on käytössä ns. toisen asteen näkökulma, kun tutkitaan sitä, miltä maailma näyttää eri ihmisten näkökannalta. Poikkeuksena yleisestä fenomenografisesta tutkimuksesta Marton (1994) mainitsee Dagmar Neumannin väitöskirjan ”The origin of arethmetic skills. A phenomenographic approach” vuodelta 1987. Siinä ilmiötä ei tarkastella yleisellä tasolla, vaan Neuman todellakin kysyy, mitä koehenkilö ajattelee haastattelun aikana. Omassa tutkimuksessani on hyvin samanlainen lähtökohta.

Booth (1992, 65) jaottelee fenomenografisen tutkimuksen validiteetin kolmeen osa-alueeseen: sisältöön liittyvään (content-related), metodologiseen ja kommunikatiiviseen validiteettiin. Ensimmäisen osalta tutkijalla pitää olla syvä tietämys aiheesta, jotta hän osaa kysyä oikeat kysymykset, toisen osalta tutkimus pitää muotoilla ja toteuttaa fenomenografisten periaatteiden mukaisesti. Kolmannen osalta tutkimuksessa pitää käyttää sellaista kieltä, jota tutkittavat ymmärtävät. Tulosten osalta taas pitää käyttää sellaista kieltä, jota kuuluu käyttää ko. tutkimusyhteisössä. Tässä tutkimuksessa haastatteluissa on käytetty koulumatematiikasta tuttuja termejä, mutta myös selitetty asioita omin sanoin. Tutkimuksen tulokset taas liittyvät vahvasti muuhun aiheesta julkaistuun tutkimukseen, mikä lisää tutkimuksen luotettavuutta.

Pangin (2003) mukaan fenomenografiassa on viime aikoina alettu keskittyä sellaisiin kysymyksiin kuin ’mikä on tapa kokea jotakin’ ja ’mitä ovat todelliset erot kahdessa eri tavassa kokea sama asia’. Hänen mukaansa vastaus ensimmäiseen kysymykseen on, että jokaiselle ilmiölle löytyy rajallinen määrä kriittisiä ominaisuuksia, jotka erottavat sen muista ilmiöistä. Mutta myös itse ilmiön kokemisessa nämä kriittiset ominaisuudet varioivat. Siksi nykyisessä fenomenografiassa ei keskitytä vain eri tapoihin kokea joku ilmiö vaan myös näiden eri tapojen sisällä olevaan vaihteluun. (Pang 2003; Marton & Pang 1999.) Omassa tutkimuksessani se tarkoittaa, että löydettyjen kategorioiden sisällä on paljon variointia ja eri aspekteja. Näin todella myös on ja näitä vaihteluja olen yrittänyt tuoda esille esimerkkien avulla.

8.2 Syyskuun mittauksen uudelleen luokittelu

Luokittelin alun perin haastatteluaineistoni syyskuun ja tammikuun mittaukset syksyn 2004 aikana. Seuraavana keväänä 2005 luokittelin sitten toukokuun mittauksen eri kategorioihin, jotka olin tällä välin muodostanut ja nimennyt. Myöhemmin nimet ovat tosin tarkentuneet ja osin muuttuneetkin. Alkuvuodesta 2007 luokittelin ensimmäisen luokan osalta aineiston osin uudelleen, kun poimin kategoriaan ’puutteelliset strategiat’ kuuluvat tehtävien ratkaisut tarkemmin esille. Samaan aikaan sain kaikki luokittelut kootuksi tilastolliseksi aineistoksi. Saadakseni selville, miten luotettava oma luokitteluni oli, tein keväällä 2008 syyskuun testistä uuden luokituksen nimenomaan laskustrategioista, en tehtävien sujuvuudesta, ja vertasin sitä aiemmin tekemiini luokituksiin. Olihan edellisistä luokituksista kulunut jo hyvin pitkä aika.

Nyt on mahdollista laskea prosenttiosuudet sille, miten samalla tavalla olin luokitellut strategiat. Ensimmäisen luokan osalta vanhan ja uuden luokituksen välinen yksimielisyysprosentti oli peräti 92% ja kategorioiden frekvenssit muodostuivat hyvin samanlaisiksi

Toisen luokan osalta yksimielisyysprosentti oli 76%, joka on siis huomattavasti matalampi. Kun tarkastelin eri kategorioiden frekvenssejä toisen luokan osalta, huomasin, että olin uudessa luokittelussani luokitellut hivenen eri tavalla tehtäviä, jotka kuuluvat kategorioihin ’lukusanoja luettelemalla’ ja ’omat strategiat’. Olin itse asiassa siirtänyt monen tehtävän kategoriasta ’omat strategia’ kategoriaan ’lukusanoja luettelemalla’. Tämä selittyy ehkä osin sillä, että ensimmäinen luokittelu oli tehty niin analysoinnin alkuvaiheessa, että en vielä selkeästi nähnyt näiden kahden eri kategorian eroja. Toisaalta olen edellä kategorioita kuvatessani todennut, että ’omat strategiat’ ovat lähellä kategoriaa ’laskeminen lukusanoja luettelemalla’. Kuitenkin ne ansaitsevat tulla käsitellyksi omana kategorianaan. Ratkaisevaa ei olekaan kategorioihin sijoittuvien tehtävien ratkaisujen *määrä* vaan niiden *laatu*.

Sen sijaan ’ositteluun perustuvat’ strategiat ja niitä seuraava automaation osuus samoin kuin kohta ’ei tietoa’ olivat hyvin selkeästi samoin luokiteltu.

Tätä tutkimusta voisi myös luonnehtia moninkertaiseksi tapaustutkimukseksi, koska tapaustutkimuksen tutkimuskohteena voi olla luokan oppilaat (Stake 2005, 444). Siksi sen tuloksia ei voida yleistää. Kuitenkin, kuten edellä on jo mainittu, fenomenografinen tutkimus on uuden löytämistä. Jos tämän tutkimuksen tulokset tuovat jotain uutta, jonkin uuden näkökulman tutkittavaan asiaan, on se jo sinällään tärkeää. Sitä pohditaan seuraavassa, tutkimuksen viimeisessä luvussa.

9 Pohdinta

Lukukäsitettä ja 1. ja 2. luokan oppilaiden matemaattisia taitoja on maailmalla tutkittu paljon. Tämä tutkimus esittelee suomalaisten lasten käyttämiä laskustrategioita yhteen- ja vähennyslaskuissa. Suomessa lukukäsitettä ja laskemisen strategioita on tutkittu lähinnä kvantitatiivisin menetelmin tukeutuen lukukäsitetesteihin (esim. Aunio 2006, Koponen 2008).

Tässä tutkimuksessa pyrin selvittämään paitsi oppilaiden käyttämiä laskustrategioita niin myös heidän lukukäsitteen kehittymistä. Lukukäsitteen kehittyminen on edellytys laskustrategioiden kehittymiselle ja ne myös kehittyvät osittain yhdessä. Ei ole hyviä ja tehokkaita laskustrategioita ilman hyvää lukukäsitettä ja toisaalta hyvä lukukäsitteen hallinta voi johtaa hyviin ja tehokkaisiin laskustrategioihin.

Vaikka tutkimuskohteena on vain yksi luokka, jossa on 6 ensimmäisen luokan oppilasta ja 11 toisen luokan oppilasta, voi tuloksilla fenomenografian periaatteiden mukaan olla yleisempääkin merkitystä. Tämä toteutuu sillä ehdolla, että tulokset sopivat yleiseen teoriaan tutkittavasta asiasta. Näin mielestäni tässä tutkimuksessa juuri on. Tulokset tukevat hyvin mm. Fusonin (1992) esittämää teoriaa yhteen- ja vähennyslaskun kehittymisestä ja lisäksi olen löytänyt mielenkiintoisia, hiukan erilaisia, oppilaiden käyttämiä strategioita yhteen- ja vähennyslaskuun. Tarkoitan näillä strategioita, jotka olen nimennyt kuuluvan kategoriaan 'oppilaan omat strategiat'.

Seuraavassa pohdin teoriataustan mukaisia lukukäsitteen ja yhteen- ja vähennyslaskun rakentumisen vaiheita ja vertaan näitä vaiheita siihen, mitä olen tässä tutkimuksessa löytänyt. Sen jälkeen tarkastelen vielä tulosten merkitystä opetus-oppimisteorian ja matematiikan ymmärtämisen näkökulmasta sekä palaan alkuperäiseen ajatukseeni konkreettisen esinemaailmaan kuuluvien mallien käytöstä. Lopuksi pohdin vielä tulosten merkitystä kouluopetukseen ja luokan käytäntöihin.

9.1 Yhteen- ja vähennyslaskun rakentumisen kategoriat

Lapsen lukukäsite ja yhteen- ja vähennyslasku kehittyvät lukusanojen luettelemisesta kohti todellista lukujen ymmärrystä, toisin sanoen kohti sitä, että jokaisella luvulla on oma paikkansa lukujärjestelmässä, ja että lukuja voidaan ositella ja niillä voidaan laskea monipuolisesti ja tehokkaasti ilman erityistä "lukusanoilla luettelemista". Tämä laskeminen tapahtuu siis alkuvaiheessa ulkoisten esineiden avulla, mutta päätyy lopulta tunnettujen lukuihin liittyvien tosiasioiden käyttöön sekä automatisoitumiseen, jolloin laskun lopputulos on lähinnä todettavissa. (Fuson 1992.) Tässä kehityksessä on joukko kehitysvaiheita, jotka seuraavat toisiaan. Esimerkiksi Piaget (1952) jakoi lapsen lukukäsitteen kehittymisen kolmeen eri vaiheeseen, joista ensimmäisessä vaiheessa lapsi ei ymmärrä numeeristen ja loogisten operaatioiden yhteyttä. Toisessa vaiheessa hän ymmärtää sen intuitiivisesti ja kolmannessa vaiheessa systemaattisesti siten, että se on todellinen käänteisiin operaatioihin perustuva ymmärrys.

Piaget tutki lukukäsitteen kehittymistä, hän ei siis ollut kiinnostunut kouluopetuksesta, jota hän piti lähinnä "kielellisenä" oppimisena (Piaget 1952). Sen sijaan Fuson (1992) erottelee yhteen- ja vähennyslaskun rakenteiden kehittymisen vaiheet lapsen lukukäsitteen kehittymisen vaiheista, johon ne toki perustuvat. Hänkin esittää kehityksessä kolme eri vaihetta. Niistä ensimmäisessä vaiheessa esinejoukko on mallina yhteen- ja vähennyslaskulle, ja tästä esinejoukosta lapset konstruoivat ratkaisun. Toisessa vaiheessa kaikki yhteen- ja vähennyslaskun kolme eri lukua voidaan esittää samalla lukujonolla, ja myöhemmin lasku voi lyhentyä esimerkiksi niin, että laskeminen alkaa toisesta yhteenlaskettavasta. Kolmannessa vaiheessa luvut ovat niin ymmärrettäviä, että niiden summaa tai erotusta ei tarvitse erikseen laskea, vaan se on todennettavissa. (Fuson 1992.) Erikseen Fuson käsittelee vielä moninumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskua.

Tässä tutkimuksessa olen halunnut selvittää tarkemmin, miten edellä kuvattu siirtyminen puutteellisista yhteen- ja vähennyslaskustrategioista kohti todellista lukujen ymmärrystä ja tehokkaita laskustrategioita toteutuu. Tämä kehitys siis tarvitsee alkuvaiheessa konkreettisia esinemalleja apuna. Fenomenografian luonteen mukaisesti olen ryhmitellyt oppilaiden käyttämiä laskustrategioita, ja olenkin sieltä löytänyt teorian mukaisesti lukukäsitteen kehittymisen alkuvaiheeseen liittyviä strategioita, samoin kuin lukusanojen luettelemiseen perustuvia strategioita sekä tehokkaita ositteluun perustuvia strategioita. Näitä ositteluun perustuvia strategioita seuraa sitten automatisoituminen. Kuitenkin olen "lukusanoja luettelemalla" ja "osittelemalla" laskemisen väliin sijoittanut kategorian, jonka nimesin nimellä "omat strategiat". Niillä tarkoitan strategioita, jotka poikkeavat hiukan niistä strategioista, joita oppikirjoissa ja tunneilla esitetään. Niissä usein ensimmäisestä yhteenlaskettavasta (tai vähenevästä) tehdään tasakymppi, jolloin yhteen- tai vähennyslaskun välivaihe on helppo tehdä. Sitten vastaukseen siirrytään vaiheittain menemällä ylös- tai alaspäin sen verran kuin em. ensimmäinen yhteenlaskettava (vähenevä) erosi kympistä. Esimerkiksi oppilas voi laskea laskun 8+8 siten, että laskee mielessään 10+8=18, 9+8=17 ja 8+8=16. Vastaavasti hän saattaa vähentää laskun 12-5 mielessään seuraavasti 10-5=5, 11-5=6 eli 12-5=7. Toinen tapa laskea 12-5 tässä kategoriassa on laskea 10-5=5 ja sitten 5+2=7.

Samoin lasken näihin 'omiin strategioihin' kuuluvan myös laskutavan, jossa oppilas laskee yhteen- tai vähennyslaskun näkemällä sen mielessään allekkain laskuna. Tämä strategia oli Varolin ja Farranin (2007, 90) luokittelussa mentaalisista strategioista viimeisenä. Lasken sen kuitenkin 'omiin strategioihin', koska yleensä tätä tapaa ei oppikirjoissa tai tunneilla erikseen opeteta. Vielä kolmanneksi strategiaksi 'omiin strategioihin' voidaan mainita lukusanoilla luettelemalla laskeminen tavalla, jossa vastaukseen edetään vaiheittain 'pienin askelin'. Esimerkiksi lasku 15-7 on laskettavissa 15-2=13, 13-2-2-1=8.

Nämä "omat strategiat" sisältävät osittelua siinä mielessä, että on esimerkiksi osattava jakaa ensimmäinen yhteenlaskettava tai vähenevä kympiksi ja siitä ylimeneväksi osaksi. Ne voikin nähdä menetelmänä, joka johtaa osittelun käyttöön. Toisaalta ne eivät ole kovin tehokkaita yli kahdenkymmenen menevillä luvuilla ja vielä hankalampia, jos yhteen- tai vähennyslaskun toinen jäsen on suurempi kuin kymmenen. Oppilailla, joilla esiintyi näitä strategioita, jotka nimesin nimellä "omat strategiat" olikin paljon hankaluuksia laskea suuremmilla kaksinumeroisilla luvuilla, esimerkiksi he eivät hahmottaneet helposti sellaisia tehtäviä kuin vaikkapa 15+15 tai 75-20.

Ensimmäisen luokan oppilailla oli syksyn alussa paljon strategioita, jotka nimesin nimellä "puutteelliset" strategiat. Se oli sikäli huomionarvoista, että haastattelu tehtiin vasta syyskuun puolessa välissä, kun koulua oli jo takana noin kuukausi. Näistä puutteellisista strategioista oppilaat siirtyivät sitten käyttämään "lukusanojen luetteleminen" strategiaa. Sitä käyttivät alussa nekin ensimmäisen luokan oppilaat, jotka nopeasti oppivat tehokkaan lukujen osittelun. "Lukusanojen luetteleminen" näyttää joillekin oppilaille olevan lähes pysyvä strategia ja he käsittävät yhteen- ja vähennyslaskun lähinnä aina siten, että pitää laskea lukusanoja luettelemalla. Tässäkin tutkimuksessa se oli käytössä yhdellä oppilaalla vielä kolmannen luokan seurantamittauksessa.

Lisäksi on tutkimuksia, joissa lukusanojen luetteleminen on todettu olevan oppilaalla käytössä ylemmilläkin luokilla. Esimerkiksi Cumming & Elkins (1999) tutkivat luokkien 3–6 oppilaiden (iältään 7–11 vuotta) automaation ja tehokkaiden yhteenlaskustrategioiden vaikutusta monimutkaisempien laskutoimitusten suorittamiseen. Heidän jaottelussaan olivat mukana vielä mm. ryhmät: counting all, counting on the second addend ja counting minimund addend, siis laskutavat, jotka itse olen luokitellut kategoriaan "luettelemalla lukusanoja". Nyt vaikka Cumming ja Elkins eivät teekään eroa "hyvien" ja "huonojen" laskutapojen välillä, heidän mukaansa kognitiivinen tehokkuus yhteenlaskuissa on tärkeää selviytymisessä monimutkaisemmista tehtävistä ja heidän mukaansa jopa automaatio olisi suositeltavaa. (Cumming & Elkins 1999, 173–174.)

Lisäksi pitää huomioida se, että kun lasketaan lukusanoja luettelemalla, meillä on olemassa kaksi eri tapaa laskea. Esimerkiksi tässä tutkimuksessa mukana olevassa laskuesimerkissä 12-5 voidaan luetteleminen aloittaa luvusta yksitoista ja sitten edetään viisi lukusanaa alaspäin. Siis luetellaan *yksitoista, kymmenen, yhdeksän, kahdeksan, seitsemän,* ja tämän jälkeen poimitaan vastaus seitsemän. Mutta lasku voidaan laskea myös niin, että aloitetaan luetteleminen luvusta kaksitoista, jolloin se kuuluu *kaksitoista, yksitoista, kymmenen, yhdeksän, kahdeksan.* Tämän jälkeen pitääkin poimia vastukseksi *seuraava* luku seitsemän.

Opetuksessa koulussa suositaan yleensä ensimmäistä tapaa, mutta toisaalta, jotkut oppilaat käyttävät myös jälkimmäistä. Asiaan ei yleensä edes kiinnitetä huomiota muuten kuin yhteen- ja vähennyslaskun opetuksen alkuvaiheessa. Myöhemmin oppilas voi huomaamattaan siirtyä käyttämään toista tapaa ainakin joissakin laskuissaan.

Myös suomalaisessa Näverin (2009) tutkimuksessa peruskoulun päättöluokkalaisilla löytyi näitä 'lukusanojen luettelemiseen' liittyviä strategioita. Samoin esiintyi strategioita, jotka tutkija nimesi 'köyhäksi proseduuriksi', 'kapseloitumiseksi liian aikaisin' ja 'muistiin perustuvaksi prosessoinniksi'. Viime mainitussa oli ongelmana se, että oppilaalta puuttui proseduureissaan ymmärtävä komponentti, joka olisi auttanut vastauksen oikeellisuuden tarkistamisessa. (Ks. luku 4.5.)

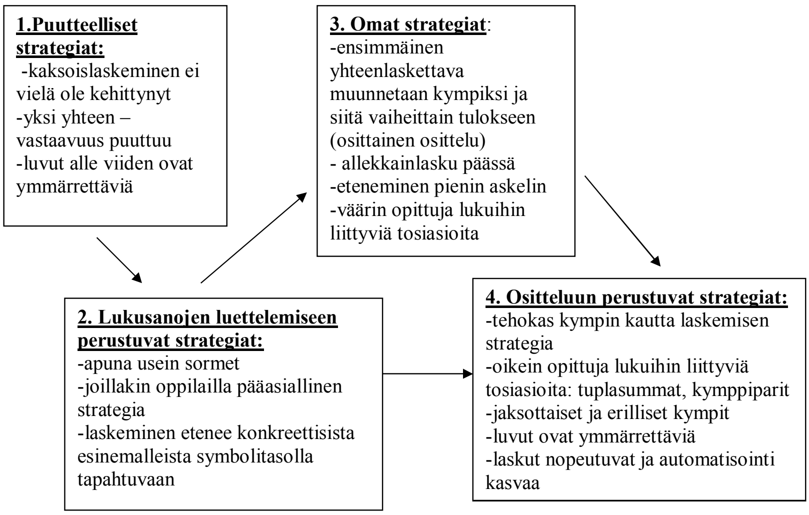
Tehokkaat ositteluun perustuvat strategiat olivat syyskuun mittauksessa käytössä kolmella 2. luokan oppilaalla. Vuoden mittaan tähän kategoriaan siirtyi oppilaita niin, että ne olivat käytössä toukokuun mittauksessa kahdeksalla 2. luokan oppilaalla (8/11) ja kahdella 1. luokan oppilaalla (2/6), jotka olivat siirtyneet käyttämään niitä jo melko nopeasti ensimmäisen luokan syksyllä. Nämä oppilaat, jotka laskevat näillä ositteluun perustuvilla strategioilla, hallitsevat myös hyvin kaksinumeroiset luvut ja laskutoimitukset niillä. Vieläpä heille näyttää olevan helppoa laajentaa lukualuetta yli sadan. Samalla heidän laskuissaan automaation osuus kasvaa, mutta sen ei tarvitse olla mikään itse tarkoitus. Kun oppilaalla on selkeä käsitys kymmenjärjestelmän luvuista ja kun hän hallitsee osittelun tehokkaasti, hän voi aina laskea laskun tarvitsematta turvautua ulkoa oppimiseen.

Usein ulkoa opittujen lukuihin liittyvien tosiasioiden, kuten kaksoissummien (7+7=14, 8+8=16,…), kohdalla oppilaat, jotka olin luokitellut kategoriaan ”omat strategiat” tekivät virheitä. Esimerkiksi sellaisia kuin päätelmä, että jos 8+8=16, niin 7+7=15. Ne, jotka laskivat ositellen, eivät näitä virheitä juuri tehneet.

Syyskuun mittauksessa oppilaat, joilla oli puutteellisia strategioita, ja jotka eivät osanneet laskea isommilla luvuilla, pystyivät kuitenkin laskemaan joitakin näistä tehtävistä palikoiden avulla. Teoriataustassa esitelty Galperinin opetus-oppimisteorian mukaisesti oppiminen lähteekin tällaisista ulkoisista malleista. Meillä oli myös matematiikan oppitunneilla konkreettista materiaalia usein esillä, siis sekä 1. että 2. luokalla. Teoriataustan perusteella voisikin sanoa, että esimerkiksi nyt tutkitussa yhteen- ja vähennyslaskujen oppimisessa sen esilläolo ja käyttö on hyvin tarpeellista

Se, että kaksi ensimmäisen luokan oppilasta oppi melko nopeasti jo syksyllä osittelun käytön, voi olla seurausta myös yhdysluokkaopetuksesta. Hehän pystyivät seuraamaan tunneilla vaativampia toisen luokan laskuesimerkkejä ja myös osasivat ratkaista niitä. He oppivat ikään kuin salaa jo paljon vaativampia laskuja kuin yleensä ensimmäisen luokan syksyllä esitetään. Samoin toisen luokan oppilaat osasivat kevään mittauksessa todella hyvin kymmenylityksen alle 20 olevilla luvuilla. Tässä heitä saattoi auttaa samainen yhdysluokkaopetus, jossa he pystyivät varmistamaan ja kertaamaan em. kymmenylitystä. Yhdysluokkaopetuksella on siis paljon etuja annettavana luokkien 1–2 matematiikan opetukseen.

Kuviossa 9 on esitelty laskustrategioiden kategoriat vielä kootusti. Nyt on huomattava, että lukusanojen luettelemiseen perustuvista laskustrategioista on mahdollista siirtyä suoraan tehokkaisiin ositteluun perustuviin strategioihin, kuten teki kaksi ensimmäisen luokan oppilasta jo tammikuun mittauksessa. Siellä oli syyskuun mittauksessa jo kolme 2. luokan oppilasta ja sinne siirtyi kaksi 2. luokan oppilasta tammikuussa ja vielä kolme 2. luokan oppilasta toukokuun mittauksessa.



Kuvio 9. Laskustrategioiden kategoriat (tarkemmin luvussa 6).

9.2 Opetus-oppimisteoria ja matematiikan ymmärtäminen

Luvussa 2 esitelty Hiebertin ja Carpenterin teoria matemaattisesta ymmärtämisestä perustui myös ulkoisiin malleihin ja esityksiin, jotka oppilas sitten liittää osaksi omia tietoverkkojaan. Tutkijat myös tekivät eron 10-järjestelmävälineistä, jotka koostuvat ykkösistä, kymppisauvoista, satalevyistä ja tuhatkuutioista verrattuna esimerkiksi Unifix-palikoihin, joilla luvut esitetään ikään kuin palikoista koostuvana lukusuorana. Tässä tutkimuksessa haastatteluissa oppilaalla oli apuna kaksi 10 palan Unifix-palikkajonoa. Mutta oppitunneilla meillä oli usein esillä nuo muutkin 10-järjestelmävälineet. Hiebert ja Carpenter (1992) määrittelivät matemaattisen ymmärtämisen niin, että matemaattinen ajatus tai proseduuri on ymmärretty, jos sen henkinen esitystapa on osa oppilaan sisäisiä ymmärryksen verkkoja. Tähän on helppo yhtyä. Näkisin niin, että niillä oppilailla, jotka laskivat ositteluun perustuvilla strategioilla, oli käytössään laajat ja joustavat ymmärryksen verkot, joita heidän oli myös helppo täydentää ja heidän oli helppo soveltaa oppimaansa uuteen tilanteeseen.

Toisaalta alkuvaiheessa puutteellisia strategioita omaavilla oppilailla nämä ymmärryksen verkot olivat vielä kehittymättömiä. ”Laskeminen lukusanoilla” strategian oppilaat ovat vielä aika tavalla kiinni konkreettisissa malleissa, jos ei muussa, niin omissa sormissaan. Samoin niillä oppilailla, joiden laskustrategiat olen luokitellut kategoriaan ”omat strategiat”, ymmärryksen verkot, vaikkakin ovat kehittymässä, eivät ole kovin laajoja ja toisiaan tukevia. Esimerkiksi heillä oli puutteita kaksinumeroisten lukujen oikeassa hahmottamisessa.

Viime vuosina on ollut tapana pitäytyä konstruktivistiseen oppimiskäsitykseen, jota sittemmin on johdettu sosio-konstruktivistiseen suuntaan. Usein oppimiseksi koetaan vain se, minkä oppilas itse itselleen rakentaa. Tähän kehitykseen on tultu mm. Piaget’n ja Vygotskyn teorioita edelleen kehittämällä. Nämä teoriat ovat tämänkin tutkimuksen lähtökohtia. Kuitenkin Pjotr Galperinin kehittämässä opetus-oppimisteoriassa hän muun muassa puhuu oppilaan omasta orientaatiosta uutta opittavaa kohtaan nimeten sen 'Orienting basis of an action' (OBA). Tätä puolestaan tukevat ulkoiset oppimisen edellytykset ja elementit, joita Galperin nimittää nimellä 'Scheme of a Complete Orienting Basis of an Action' (SCOBA). (Haenen 2001,162.) Nämä ulkoiset edellytykset ja elementit on käsittääkseni opettajan ja koulun varattava oppilaan käyttöön. Niitä ovat em. kymmenjärjestelmävälineet sekä koko se opetuksellinen ohjaus, johon opiskelu perustuu.

Tarkennetaan vielä Galperinin vaatimusta oppilaan orientaatiosta uutta opittavaa kohtaan. Orientaatiovaiheessa hankitaan ennakkokäsitys ja valmiudet tulevaan toimintaan. Ensimmäisen luokan osalta tämä tarkoittaa sitä, että käydään kehittämään oppilaan lukukäsitettä ja laskustrategioita niistä lähtökohdista, jotka kullakin oppilaalla on kouluun tullessaan. Koulunsa aloittavilla oppilailla on kova halu ja motivaatio oppia. He ovat tulleet kouluun oppiakseen lukemaan ja laskemaan. Heillä on hyvät edellytykset oppia, kun siihen tarjotaan tarkoituksenmukaiset välineet ja tarvittava lähikehitykseen sopiva apu.

Toisen luokan oppilaiden osalta orientaatioperustan yhteen- ja vähennyslaskujen edelleen kehittymiselle luo heidän edellisenä vuonna oppimansa yhteen- ja vähennyslaskutaidot. He hallitsevat todennäköisesti hyvin yhteen- ja vähennyslaskut lukualueella 0–20. Kun harjoitellaan vielä enemmän kaksinumeroisten lukujen yhteen- ja vähennyslaskuja, olisi niitä hyvä ensin harjoitella mentaalistrategioita käyttäen ts. laskien laskuja 'päässä'. Tässä tulee avuksi myös lukusuoran käyttö, esimerkiksi kymmenen välein eteneminen. Erityinen huomio on kiinnitettävä sellaisiin kaksinumeroisiin laskuihin, joissa ykkösten osalta yhteenlaskussa mennään yli kympin, esim. 27+38, tai vähennyslaskussa vähentäjässä on ykkösiä enemmän kuin vähenevässä, esim. 65-38.

Edellä olevien tehtävien ratkaisustrategiat ovat esimerkkejä mentaalisista strategioista, joita etenkin 2. luokalla on syytä harjoitella. Kun niitä opitaan tarpeeksi hyvin, edistää se lukukäsitteen hyvää omaksumista. Lukualue 0–100 tulee ymmärrettäväksi, se tulee ikään kuin näkyväksi oppilaalle. Tämän jälkeen lukualuetta on helppo laajentaa yli sadan meneviin lukuihin.

On tietenkin huomioitava se, että nyt esillä oleva lukualue on luonnolliset luvut. Sitä on mahdollista havainnollistaa kymmenjärjestelmävälineillä, kuten tämän luvun alussa todettiin. Lukualuetta on helppo laajentaa koskemaan koko kokonaislukujen joukkoa, siis myös negatiivisia kokonaislukuja. Mutta seuraava lukualueen laajennus rationaalilukuihin tarvitseekin aivan erilaisen havainnollistamisen ja ajattelun mallin. Kymmenjärjestelmävälineet ja kokonaislukuihin perustuva ajattelu voivat jopa haitata rationaalilukujen lukualueen ymmärtämistä (esim. Merenluoto 2001, 46–47). Mutta se ei poista sitä tosiasiaa, että alkuopetuksessa kymmenjärjestelmävälineiden käyttö on perusteltua ja todella tarpeellista.

Tarvitaan siis ulkoisia malleja ja materiaaleja ja lisäksi monipuolisia esitystapoja, jotta oppilas voi rakentaa itselleen hyvän ymmärryksen tason ja näin luoda itselleen hyvän pohjan tulevalle matematiikan opiskelulleen (ks. Hiebert & Carpenter 1992; Keeves 2002; Gravemeijer 2002). On myös huomattava, että se ei ole aina ihan helppo tehtävä. Jos opettaja ei koskaan kysy oppilaalta: ”Kerro, miten ajattelit kun ratkaisit tämän tehtävän…?" voi käydä niin, että oppimisvaikeudet yhteen- ja vähennyslaskuissa jäävät liian vähälle huomiolle. Nyt on vaarana, että tällaisen oppilaan matematiikan oppiminen käy liian työlääksi ja ylemmillä luokilla vaikeudet matematiikan tehtävissä vain lisääntyvät. Siksi on tärkeää ottaa ulkoiset esinemaailmaan kuuluvat mallit, erityisesti kymmenjärjestelmävälineet, tehokkaaseen ja monipuoliseen käyttöön alkuopetuksen matematiikassa. Kokonaan eri asia on kuinka nykyään yleistyvät, tietotekniikkaan perustuvat, havainnollistamismenetelmät, kuten ns. älytaulut, muuttavat käytäntöjä. Pitää kuitenkin muistaa, että visuaalinen kuva on eri asia kuin konkreettinen esinemalli (Galperin 1957, 215–216).

9.3 Luokan oppimispolut ja niiden rakentaminen

Aiemmin olen kuvaillut Muratan ja Fusonin (2006) teoriaa lähikehitysvyöhykkeestä ja luokan oppimisvyöhykkeestä. Heidän mukaansa luokassa on tavallisesti käytössä kolmesta kuuteen oppimispolkua pienin poikkeuksin. Näitä he nimittivät luokan oppimispoluiksi.

Nyt on huomattava, että vaikka on löydettävissä yleisiä suuntaviivoja siitä, miten oppilaan laskustrategiat kehittyvät, on jokaisella oppilaalla silti oma oppimispolkunsa, jota hän kulkee. Luokassamme kehitys kulki kohti tehokkaimpia ositteluun perustuvia strategioita. Joidenkin oppilaiden matka niihin oli lyhyt ja helppo. Toiset taas tarvitsivat enemmän aikaa ja kulkivat hiukan eri reittejä. Esimerkiksi oppilaat, joilla oli käytössä strategiat, jotka nimesin heidän 'omiksi strategioiksi' olivat matkalla kohti osittelun käyttöä, mutta olivat toisaalta yli 20 menevillä luvuilla laskiessaan usein hankaluuksissa. Heidän oli kuitenkin mahdollista edetä tälläkin tavalla kohti todellista ositteluun perustuvaa strategioiden käyttöä.

Ensimmäisen luokan osalta oli mahdollista hahmottaa kaksi erilaista oppimispolkua. Niistä ensimmäinen oli oppilaiden polku puutteellisista strategioista lukusanoja luettelemalla strategian käyttöön. Luokan oppilaista neljä kulki tätä polkua, vaikkakin hiukan eri nopeudella ja eri vaiheessa ollen. Toinen oppimispolku oli se, kun oppilas siirtyi lukusanojen luettelemisstrategian käytöstä suoraan tehokkaampaan ositteluun perustuviin strategioihin. Näin tapahtui kahden oppilaan kohdalla. Huomioitavaa on se, että tämä siirtyminen voi tapahtua 1. luokan oppilaankin osalta melko pian syksyn mittaan.

Toisen luokan oppilaiden osalta yksi oppimispolku, jota käytti kaksi oppilasta, oli se, että he pysyivät jokaisessa mittauksessa pääasiassa luettelemisstrategian käyttäjänä. Siinä he voivat kuitenkin edistyä ja heidän laskemiseensa ilmaantui myös osittelua sekä parempi ymmärrys luvuista. Toinen oppimispolku oli sellainen, jossa lähinnä pysyttiin omien strategioiden käyttäjänä, vaikka osa näistä omista strategioista vaihtuikin osittelun käyttöön tai myös lukusanojen luettelemisstrategian käyttöön. Kolmas oppimispolku johti omien strategioiden käytöstä ositteluun perustuvien strategioiden käyttöön ja neljäs oppimispolku oli sellainen, jossa oppilas oli jokaisessa mittauksessa pääasiassa osittelustrategian käyttäjä, mutta jossa hänen laskemisensa nopeutui ja ymmärryksensä luvuista kasvoi.

Opiskelun alussa on myös kiinnitettävä huomiota oppilaan lukujonotaitoihin. Niitä kannattaa harjoitella jo aivan opiskelun alkuvaiheessa, esimerkiksi opettelemalla luettelemaan lukuja myös taaksepäin alkaen vaikkapa luvusta kaksikymmentä. Myös parillisten ja parittomien lukujen luettelemista kannattaa harjoitella. Myös lukujonoja 5:n tai 10:n välein kannattaa harjoitella (ks. Aunio 2008, 65–66).

Luokassa käytetyt käsitteet ja kieli vaikuttavat oppilaiden suoriutumiseen tehtävissään. Bills'n (2002) tutkimuksen mukaan ne oppilaat, jotka olivat omaksuneet luokan yleisen puhetyylin tehtäviä ratkaistessaan, myös useimmiten ratkaisivat ne oikein. Luokassamme oli käytössä sanonta 'laskea kympin kautta'. Siinä viitattiin tehokkaaseen tapaan laskea ositellen esim. 7+5=7+3+2=12. Tämä sitten näkyi tutkimustuloksissa siten, että oppilaat käyttivät ilmaisua 'kympin kautta' selittäessään laskustrategioitaan.

Realistisessa matematiikan opetuksessa (Beishuizen 1998) lukuja käsitellään kokonaisuuksina siten, että kaksinumeroisillakin luvuilla lasketaan ensin laskuja henkisesti "päässä laskien". Samalla allekkain laskun algoritmi opetetaan vasta vähän myöhemmin. Tämä malli tulee siis Hollannista. Suomessakin voisi ajatella, että näitä mentaalisia strategioita (eli päässälaskustrategioita) opetettaisiin 1. ja 2. luokalla nykyistä enemmän. Monet heikommin osaavat oppilaathan turvautuvat mielellään allekkain laskuun, mutta heidätkin olisi hyvä saada laskemaan kaksinumeroisia laskuja mentaalisia strategioita käyttäen. Päässälaskustrategioita olisi sitä paitsi hyvä kehittää koko alakoulun ajan, siis myös muissa laskuissa kuin kokonaislukuilla laskettaessa (Callingham 2005).

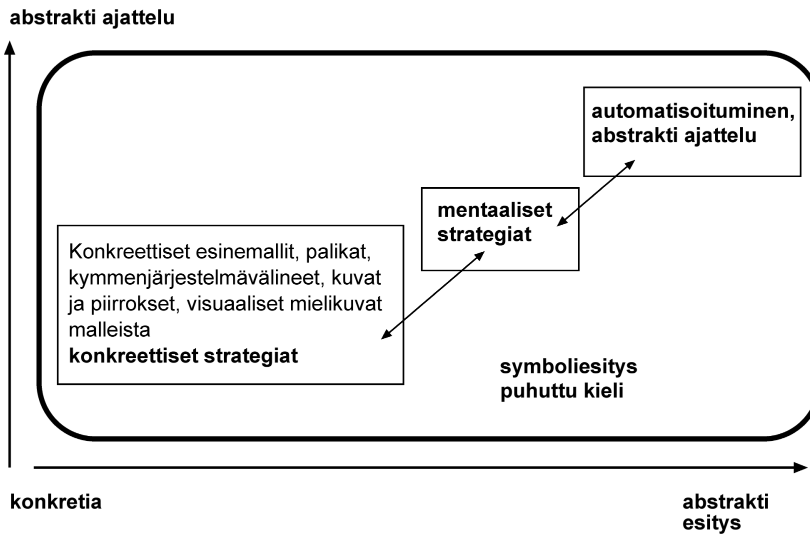
Pohditaan vielä lopuksi tehtävien havainnollistamista matematiikan tunneilla. Edellä on jo kuvailtu sitä, miten konkreettisilla palikkajonoilla, esimerkiksi Unifix-palikoilla, voidaan havainnollistaa lukujonoa ja sitä kautta luonnollisten lukujen joukkoa. Mukaan kannattaa ottaa muutkin kymmenjärjestelmävälineet, esimerkiksi ykköspalaset, kymppisauvat, satalevyt ja tuhatkuutiot.

Konkreettisten esinemallien lisäksi myös lukusuoraesitys on varsin hyvä keino havainnollistaa laskuja. Otetaan esimerkiksi lasku 5+3, jonka oppilas voi virheellisesti laskea luettelemalla *viisi, kuusi, seitsemän* ja poimia vastauksen väärin: *seitsemän*. Lukusuoralla voidaan lasku havainnollistaa vaikkapa siten, että sanotaan: "Nyt hyppäsit yhden askeleen paikallaan. Loikataanpa kolme askelta eteenpäin: *kuusi, seitsemän, kahdeksan."*

Havainnollistamisessa lähdetään siis liikkeelle konkreettisista esinemalleista. Mukaan tulevat visuaaliset kuviot ja puhuttu kieli. Samalla tutustutaan laskun symboliesitykseen ja ehkä myös mentaalisiin strategioihin. Niistä sitten edetään yhä abstraktimpaan ajatteluun (Kuvio 10).

Suomalaisessa Aunolan, Leskisen ja Nurmen (2006) pitkittäistutkimuksessa esikoulusta toisen luokan lokakuulle asti selvisi, että lasten matemaattinen osaaminen ja siihen liittyvä motivaatio uusiin tehtäviin muodostivat kumulatiivisen kehän. Korkea matemaattinen osaaminen lisäsi motivaatiota uusiin tehtäviin ja se taas puolestaan lisäsi lasten osaamista. Lisäksi tämä motivaation kasvu oli löydettävissä erityisesti luokissa, joissa opettaja piti tärkeänä motivointia ja oppilaan itsetunnon kohottamista. (Aunola, Leskinen & Nurmi 2006.) Tärkeää olisi, että heikommin menestyvät oppilaat eivät jäisi tästä onnistumisen kumulatiivisesta vaikutuksesta paitsi. Siihen päästään, kun heille tarjotaan runsaasti tilaisuuksia rakentaa ja löytää tehokkaita ositteluun perustuvia laskustrategioita.

Aiemmin teoriataustassa on esitelty Koposen (2008) tutkimus kielellisten taitojen yhteydestä matemaattisten perustaitojen kehittymiseen. Siinä tutkimuksessahan oli mukana kaksi osatutkimusta, joissa oli yksilötutkimusasetelma. Tuloksena oli, että vaikka oppilailla oli kielellisiä heikkouksia, heidän laskustrategioitaan pystyttiin kehittämään. Laskuja myös opetettiin merkityksellisissä suhteissa toisiinsa eikä irrallisina faktatietoina tai menettelytapoina. Laskustrategioiden opettaminen heikommin menestyville oppilaille onkin aivan erityisen tärkeää. Paremmin menestyvät oppilaat keksivät ne kyllä tarvittaessa itsekin.



Kuvio 10. Havainnollistaminen ja laskustrategiat matematiikan opetuksessa Galperinin teoriaa mukaillen.

Laskustrategioita voi siis ja kannattaa opettaa 1. ja 2. luokalla. Niihin pitää kiinnittää huomiota ja niiden opiskelussa on konkreettisilla lukujärjestelmämalleilla keskeinen ja tärkeä osa. Opettajan tulee tietää, miten oppilas laskee yhteen- ja vähennyslaskuja. Voisi ajatella, että tätä opettajan osuutta ja opettajan käyttämiä menetelmiä yhteen- ja vähennyslaskun opettamisessa tutkittaisiin tarkemmin. Kiinnittävätkö opettajat huomiota oppilaiden laskustrategioihin? Ovatko he ylipäänsä tietoisia siitä, minkälaisia laskustrategioita oppilailla esiintyy?

Luokkaan on järjestettävä kymmenjärjestelmävälineitä ja malleja. Oppilaalla pitää olla niitä myös omassa käytössään, etenkin opiskelun alkuvaiheessa. Oppilaita voi myös rohkaista selittämään ajatteluaan ja käyttämiään laskustrategioita. On myös huomattava, että oppilaat voivat oppia laskustrategioita toisiltaan, kun he yhdessä ratkovat yhteen- ja vähennyslaskuja. Luokkaan on mahdollista luoda sellainen ilmapiiri, että kaikki innostuvat harjoittelemaan ja opiskelemaan näitä laskustrategioita. Tällöin jokainen voi edetä omaa oppimispolkuaan edeten kohti hyviä ja tehokkaita strategioita ja näin saada hyvän pohjan tulevalle matematiikan opiskelulleen.

Lähteet

Ahonen, S. (1994). Fenomenografinen tutkimus. Teoksessa L. Syrjälä, S. Ahonen, E. Syrjäläinen & S. Saari (toim.), *Laadullisen tutkimuksen työtapoja.* Rauma: Kirjayhtymä Oy, 114–160.

Attorps, I. (2006). Mathematics teachers' conceptions about equations. Research Report 266. Department of Teacher Education, University of Helsinki. (Department of Applied Sciences of Education)

Aunio, P. (2008). Matemaattiset taidot ennen koulun alkua. *NMI-bulletin, 18*(4), 63–74. http://www.nmi.fi/nmi-bulletin/bulletin-pdf/aunio4_2008.pdf Luettu 15.12.2011.

Aunio, P., Hannula, M. M., & Räsänen, P. (2004). Matemaattisten taitojen varhaiskehitys. Teoksessa P. Räsänen, P. Kupari, T. Ahonen & P. Malinen (toim.), *Matematiikka – näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen.* 2. uudistettu painos. Niilo Mäki Instituutti. Jyväskylä: Kirjapaino-Oma.

Aunola, K., Leskinen, E., & Nurmi, J-E. (2006). Developmental dynamics between mathematical performance, task motivation, and teachers' goals during the transition to primary school. *British Journal of Educational Psychology, 76*(1), 21–40.

Baddeley, A.D. (2000). The episodic buffer: a new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences, 4*(11), 417–423.

Baroody, A. J. (1999). Children`s Relational Knowledge of Addition and Subtraction. *Cognition and Instruction, 17*(2), 137–176.

Baroody, A. J., & Gannon, K. E. (1984). The Development of the Commutativity Principle and Economical Addition Strategies. *Cognition and Instruction, 1*(3), 321–339.

Becker, J., & Varelas, M. (2001). Piaget's Early Theory of the Role of Language in Intellectual Development: A Comment on DeVries`s Account of Piaget`s Social Theory. *Educational Researcher, 30*(6), 22–23.

Beishuizen, M. (1998). Which mental strategies in the early number curriculum? A comparison of British ideas and Dutch views. *British Educational Research Journal, 24*(5), 519–619.

Bereiter, C. (1985). Toward a solution of the learning paradox. *Review of Educational Research, 55*(2), 201–226.

Bills, C. (2002). Linguistic pointers in young children's descriptions of mental calculation. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.2, 97–104. Norwich: PME.

Bonotto, C. (2009). Artifacts: Influencing practice and supporting problem posing in the mathematics classrooms. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 193–200. Thessaloniki, Greese: PME.

Booth, S. A. (1992). *Learning to program. A phenomenographic perspective.* Göteborg Studies in Educational Sciences, 89, Acta Universitatis Gothoburgensis.

Callingham, R. (2005). A whole-school approach to developing mental computation strategies. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 201–208. Melbourne: PME.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem-solving skills. In T. P. Carpenter, J. M. Moser & T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 9–249.

Carpenter, T. P., & Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(3), 179–202.

Clarke, B., McDonough, A., & Sullivan, P. (2002). Measuring and describing learning: The early numeracy research project. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 181–185. Norwich: PME.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(1), 2–33.

Cumming, J. J., & Elkins, J. E. (1999). Lack of Automaticity in the Basic Addition Facts as a Charasteristic of Arithmetic Learning Problems and Instructional Needs. *Mathematical Cognition, 5*(2), 149–180.

Dienes, Z. P. (Ed.) (1966). *Mathematics in Primary Education.* Hamburg: Unesco Institute for Education.

Dienes, Z.P., & Golding, E.W. (1974). *Methodik der modernen Mathematik*. 3. Auflage. Herder: Freiburg im Breisgau.

Diezmann, C., & Lowrie, T. (2007). The development of primary students' knowledge of the structured number line. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 201–208. Seoul: PME.

Domino, J., & Schroeder, T L. (2011). The effects of physical manipulatives on achievement in mathematics in grades K-6: A meta-analysis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 273–280. Ankara, Turkey: PME.

English, L. D., & Watters, J. J. (2005). Mathematical modelling with 9-year-olds. In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 297–304. Melbourne: PME.

Enkenberg, J. (2002). Uuden pedagogiikan perusta. Teoksessa M-L. Julkunen (toim.), *Opetus, oppiminen ja vuorovaikutus*. 2., uusittu painos. Vantaa: WSOY, 157–177.

Ernest, P. (1994). Social Constructivism and the Psychology of Mathematics Education. In P. Ernest (Ed.), Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education. London: The Falmer Press, 62–72.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Fritzlar, T., & Karpinski-Siebold, N. (2011). Algebraic thinking of primary students. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 345–352. Ankara, Turkey: PME.

Fuson, K. C. (1984). More Complexities in Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(3), 214–225.

Fuson, K. C. (1990). Conceptual Structures for Multiunit Numbers: Implications for Learning and Teaching Multidigit Addition, Subtraction, and Place Value. *Cognition and Instruction, 7*(4), 343–403.

Fuson, K. C. (1992). Research on Whole Number Addition and Subtraction. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics.* New York: MacMillan Publishing Company, 243–275.

Fuson, K. C. (1998). Pedagogical, Mathematical, and Real-World Conceptual-Support Nets: A Model for Building Children's Multidigit Domain Knowledge. *Mathematical Cognition, 4*(2), 147–186.

Fuson, K. C. (2000). Achievement Results for Second and Third Graders Using the Standard-Based Curriculum Everyday Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(3), 277–246.

Fuson, K. C., Smith, S. T., & Lo Cicero, A. M. (1997). Supporting Latino First Grades' Ten-Structured Thinking in Urban Classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(6), 738–766.

Fuson, K. C., Wearne, D., Hiebert, J. C., Murray, H. G., Human, P. G., Olivier, A. I. Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1997). Children's Conceptual Structures for Multidigit Numbers and Methods of Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(2), 130–162.

Galperin, P. YA. (1957). An experimental study in the formation of mental actions. (Transl. N. Parsons). In B. Simon (Ed.), *Psychology in the Soviet Union*. London: Routledge and Kegan Paul, 213–225.

Galperin, P. J. (1979). *Johdatus psykologiaan.* Kansankulttuuri Oy. Helsinki.

Galperin, P. YA., & Talyzina, N. F. 1961. Formation of elementary geometrical concepts and their dependence on directed participation by the pupils. (Transl. H. Asher) In N. O'Connor (Ed.), *Recent Soviet Psychology.* Oxford: Pergamon Press, 247–272.

Gelman, R. (1982). Accessing one-to-one correspondence: Still another paper about conservation. *British Journal of Psychology, 73*, 209–220.

Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early Identification and Interventions for Students With Mathematics Difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 293–304.

Gervasoni, A. (2006). Insights about the addition strategies used by grade 1 and grade 2 children who are vulnerable in number learning. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 177–184. Prague: PME.

von Glaserfeld, E. (1978). Radical constructivism and Piaget's concept of knowledge. In F. B. Murray (Ed.), *Impact of Piagetian theory*. Baltimore: University Park Press.

von Glaserfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. Washington, DC: Falmer.

Glassman, M. (2001). Dewey and Vygotsky: Society, Experience, and Inquiry in Educational Practice. *Educational Researcher, 30*(4), 3–14.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 443–471.

Gravemeijer, K. (1999). How Emergent Models May Foster the Constitution of Formal Mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155–177.

Gravemeijer, K. (2002). Building new mathematical reality, or how emergent modelling may foster abstraction. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 125–128. Norwich: PME.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(2), 115–141.

Guba, E. G., & Lincoln Y. S. (1989). *Fourt Generation Evaluation*. London: Sage Publications.

Guba, E. G., & Lincoln Y. S. (2005). Paradigmatic Controversies, Contradictions, and Emerging Confluences. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research*. Third Edition. Sage Publications. Thousand Oaks, California, 191–215.

Gröhn, T. (1992). Fenomenografinen tutkimusote. Teoksessa T. Gröhn & J. Jussila (toim.), *Laadullisia lähestymistapoja koulutuksen tutkimuksessa.* Helsinki: Yliopistopaino, 1–32.

Haenen, J. (2001). Outlining the teaching-learnin process: Piotr Gal'perin's contribution. *Learning and Instruction, 11*, 157–170.

Hakkarainen, P. (2010). Lähikehityksen vyöhyke – pedagogiikan kulmakivi? *Kasvatus, 41*(3), 240–251.

Hanley, T. V. (2005). Commentary on Early Identification and Interventions for Students With Mathematical Difficulties: Make Sense-Do the Math. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 346–349.

Hannula, M. M., Lepola, J., & Lehtinen, E. (2010). Spontaneous focusing on numerosity as a domain-spesific predictor of arithmetical skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 107*(4), 394–406.

Hannula, M. M., Räsänen, P., & Lehtinen, E. (2007). Developmental of Counting Skills: Role of Spontaneous Focusing on Numerosity and Subitizing-Based Enumeration. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(1), 51–57.

Hartnett, J. (2007). Categorisation of Mental Computation Strategies to Support Teaching and to Encourage Classroom Dialogue. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/.pdf. Luettu 7.12.2009

Heirdsfield, A. N., & Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *Journal of Mathematical Behavior, 23*, 443–463.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching with Understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning. A project of the National Council of Teachers of Mathematics*. New York: MacMillan Publishing Comapany, 65–97.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between Teaching and Learning Place Value with Understanding in First Grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(2), 98–122.

Holt, J. (1982). *How children fail* (2nd Ed.) New York: Delta.

Horne, M., & Livy, S. (2006). Young children developing place value understandings. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlikova (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 3, 313–320. Prague: PME.

Huusko, M., & Paloniemi, S. (2006). Fenomenografia laadullisena tutkimussuuntauksena kasvatustieteissä. *Kasvatus, 37*(2), 162–173

Häggblom, L. (2004). Use of Manipulatives in Instruction and Learning. In E. Pehkonen, G. Brandell & C. Winslow (Eds.), *Nordic Presentations. Proceedings of the section Nprdic Presentations at ICME-10*, July 12, 2004 in Copenhagen (Denmark).

Häkkinen, K. (1996). *Fenomenografisen tutkimuksen juuria etsimässä. Teoreettinen katsaus fenomenografisen tutkimuksen lähtökohtiin*. Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Opetuksen perusteita ja käytänteitä 21.

Jordan, N. C. (2007). The Need for Number Sense. *Educational Leadership, 65*(2), 63–66.

Joutsenlahti, J. (2005). *Lukiolaisen tehtäväorientoituneen matemaattisen ajattelun piirteitä*. Acta Universitatis Tamperensis 1061. Tampere: Tampere University Press.

Kalaoja, E. (2010). Mitä yhdysluokkaopetuksella tarkoitetaan? Teoksessa E. Korpinen (toim.), *Eläköön kyläkoulu!* Jyväskylä: PS-kustannus.

Keeves, J. (2002). Learning in schools: a modelling approach. *Kasvatus, 33*(4), 338–348.

Kemmis, S. (2006). Participatory action research and the public sphere. *Educational Action Research, 14*(4), 459–476.

Keranto, T. (1981). *Lukukäsitteen kehittyminen ja kehittäminen: Matemaattis-loogiset perusteet ja luvun kognitiivinen rakentuminen*. Väitöskirja. Acta Universitatis Tamperensis ser. A vol. 125.

Keranto, T., & Sarenius, V-M. (2010). Lukusuora ensimmäisen ja toisen kouluvuoden matematiikassa: kriittinen tarkastelu. *Kasvatus, 41*(5), 466–471

Kerkman, D. D., & Siegler, R. S. (1997). Measuring individual differences in children`s addition strategy choices. *Learning and Individual Differences, 9*(1), 1–18.

Ketterlin-Geller, L. R., Chard, D. J., & Fien, H. (2008). Making Connections in Mathematics. Conceptual Mathematics Intervention for Low-Performing Students. *Remedial and Special Education, 29*(1), 33–45.

Kieren, T. E., & Pirie, S. E. B. (1991). Recursion and the mathematical experience, In L. Steffe (Ed.), *The Epistemology of Mathematical Experience*. Springer Verlag Psychology Series, New York, 78–101.

Kinnunen, R., Lehtinen, E., & Vauras, M. (1994). Matemaattisen taidon arviointi esikoulussa ja 1. luokalla. Teoksessa M. Vauras, E. Poskiparta ja P. Niemi (toim.), *Kognitiivisten taitojen ja motivaation arviointi koulutulokkailla ja 1. luokan oppilailla*. Turun yliopisto, Oppimistutkimuksen keskuksen julkaisuja 3, 55–76.

Koponen, T. (2008). Calculation and Language. Diagnostic and Intervention Studies. Dissertation. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 340.

Koponen, T., Aro, T., & Ahonen, T. (2009). Conceptual knowledge-based strategy training in single-digit calculation: a single case intervention study in a child with specific language impairment. *European Journal of Special Needs Education, 24*(3), 259–275.

Koro-Ljundberg, M. (2005). Tietoteoreettinen validiteettitarkastelu laadullisessa tutkimuksessa. *Kasvatus, 36*(4), 274–284.

Korpinen, E. (1996). Tutkiva opettaja ja opettajankoulutus. Teoksessa S. Ojanen (toim.), *Tutkiva opettaja 2*. Helsingin yliopiston Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus. Oppimateriaaleja 55., 21–30.

Korpinen, E. (2010). Kyläkoulu yhteiskunnan rakennemuutoksessa. Teoksessa E. Korpinen (toim.), *Eläköön kyläkoulu!* Jyväskylä: PS-kustannus.

Koskinen, R. (2005). Orientaatiokäsite Pjotr Galperinin oppimisen teoriassa ja sen merkitys matematiikan opetuksessa. Teoksessa L. Jalonen, T. Keranto & K. Kaila (toim.), *Matemaattisten aineiden opettajan taitotieto – haaste vai mahdollisuus?* Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Oulussa 25.–26.11.2004. Oulun yliopisto. Acta Universitatis Ouluensis E, Scientiae Rerum Socalium 80, 111–122.

Kupari, P. (1999). *Laskutaitoharjoittelusta ongelmanratkaisuun: matematiikan opettajien matematiikkauskomukset opetuksen muovaajina*. Koulutuksen tutkimuslaitos. Tutkimuksia 7. Jyväskylä: Koulutuksen tutkimuslaitos.

Lakka, J. (2007a). Building Addition and Subtraction Strategies in Early Primary School Mathematics. In C. Bergsten, B. Grevholm, H. S. Måsøval, & F. Rønning (Eds.), *Relating Practise and Research in Mathematics Education*. Proceedings of Norma 05. Fourth Nordic Conference on Mathematics Education. Trondheim: Tapir Academic Press, 481–485.

Lakka, J. (2007b). Building efficient thinking strategies for addition and subtraction in early primary school mathematics. Research Report. In j. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Approaches to Teaching Mathematics at the Elementary Level*. Proceedings of the International Symposium Elementary Mathematics Teaching, August 19–24, 2007, in Prague. Charles University, Faculty of Education, 150–158.

Lerman, S. (1996). Intersubjectivity in mathematics learning: a challenge to the radical constructivist paradigm? *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(3), 133–150.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representation and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of matehematics*. London. Tawrence Erlaub Associates.

Lehto, J. E. (2005). Konstruktivismi peruskoulun didaktiikan ohjenuoraksi? Kriittinen katsaus eräisiin suomalaisiin sovellutuksiin. *Kasvatus, 36*(1), 7–19.

Leino, J. (1996). Toimintatutkimus: Käytännön ja tutkimuksen yhdistäjä. Teoksessa S. Ojanen (toim.), *Tutkiva opettaja 2*. Helsingin yliopiston Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus. Oppimateriaaleja 55., 81–90.

Lindgren, S. (1990). *Toimintamateriaalin käyttö matematiikan opetuksessa. Matikkatupakokeilu peruskoulun toisella luokalla*. Väitöskirja. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperenisis, ser A, vol 307.

Lucangeli, D., Tressoldi, P. E., Bendotti, M., Bonanomi, M., & Siegel, L. S. (2003). Effective strategies for mental and written arithmetic calculation from the third to the fifth grade. *Educational Psychology, 23*(5), 507–520.

Marton, F. (1994). Phenomenography. In T. Husén & T. N. Postlewthwaite (Eds.), *The International Encyclopedia of Education*. Second edition. Pergamon, pp. 4424–4429. http://www.ped.gu.se:80/biorn/phgraph/civil/main/1res.appr.html. Luettu 24.3.2009.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Lawrence Erlaub Associates, Publishers: Mahwah, New Jersey.

Marton, F. & Neuman, D. 1989. Constructivism and Constitutionalism. Some Implications for Elementary Mathematics Education. *Scandinavian Journal of Educational Research, 33*(1), 35–46.

Marton, F., & Pang, M. F. (1999). *Two Faces of Variation*. Paper presented at 8th European Conference for Learning and Instruction August 24–28, 1999. Göteborg University. Göteborg, Sweden. http://www.ped.gu.se/biorn/phgraph/civil/graphica/fmpmf.pdf Luettu 27.3.2009

McGilly, K., & Siegler, R. S. (1989). How Children Choose among Serial Recall Strategies. *Child Development, 60*(1), 172–182.

Meadows, S. (1993). *The Child as Thinker*. London and New York: Routledge.

Meadows, S. (2006). *The Child as Thinker*. Second edition. London and New York: Routledge.

Merenluoto, K. (2001). *Lukiolaisen reaaliluku*. Turun yliopiston julkaisuja. Sarja C osa176.

Montessori, M. (1965). *Spontaneous Activity in Education*. New York: Shocken Books.

Murata, A., & Fuson, K. (2006). Teaching as Assisting Individual Constructive Paths Within an Interdependent Class Learning Zone: Japanese First Graders Learning to Add Using 10. *Journal for Research in Mathematics Education, 37*(5), 420–456

Neuman, D. (1987). *The Origin of Arithmetic Skills. A Phenomenographic Approach*. Göteborgs universitet. Acta Universitatis Gothoburgensis.

Niemi, H. (1993). Tutkimuksen merkitys opettajan ammatin kehittämisessä. Teoksessa S. Ojanen (toim.), *Tutkiva opettaja. Opetus 21. vuosisadan ammattina.* Helsingin yliopisto. Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus. Oppimateriaaleja 21., 52–65.

Näveri, L. (2009). *Aritmetiikasta algebraan. Muutoksia osaamisessa peruskoulun päättöluokalla 20 vuoden aikana*. Tutkimuksia 309. Opettajankoulutuslaitos, Helsingin yliopisto.

Näätänen, M. (2004). Introducing Hungarian mathematics teaching ideas in Finland. In E. Pehkonen, G. Brandell & C. Winslow (Eds.), *Nordic Presentations.* Proceedings of the section Nprdic Presentations at ICME-10, July 12, 2004 in Copenhagen (Denmark).

Ojanen, S. (1996). Reflektion käsite opettajankoulutuksessa. Muotihulluus vai kasvatusreformin kulmakivi? Teoksessa S. Ojanen (toim.), *Tutkiva opettaja 2.* Helsingin yliopiston Lahden tutkimus- ja koulutuskeskus. Oppimateriaaleja 55., 51–61.

Ostad, S. A. (1999). Developmental progression of subtraction strategies: a comparison of mathematically normal and mathematically disabled children. European *Journal of Special Needs Education, 14*(1), 21–36.

Pang, M. F. (2003). Two Faces of Variation: on continuity in the phenomenographic movement [1]. *Scandinavian Journal of Educational Research, 47*(2), 145–156.

Pehkonen, E., & Seppälä, R. (2007). Muutostekijöitä suomalaisessa matematiikanopetuksessa, erityisesti vuosina 1970–2000. *Kasvatus, 38*(1), 42–50.

Peled, I., & Bassan-Cincinatus. R. (2005). Degrees of freedom in modeling: Taking certainty out of proportion. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 297–304. Melbourne: PME.

Peltonen, T. (2010). Yhdysluokkaopetuksen edut – myös esitetty kritiikki. Teoksessa E. Korpinen (toim.), *Eläköön kyläkoulu!* Jyväskylä: PS-kustannus.

Piaget, J. (2000). Piaget`s Theory. In K. Lee (Ed.), *Childhood Cognitive Development. The Essential Readings*. Oxford: Blackwell Publishers Ltd.

Piaget, J. (1952). *The Child's Conception of Number*. London: Routledge & Kegan Paul Ltd.

Piaget, J. (1978). *The Development of Thought*. Oxford: Basil Blackwell.

Piaget, J. (1985). *The Equilibration of Gognitive Structures*. Chicago and London: The University of Chicago Press.

Pirie, S. E. B., & Kieren, T. E. (1992a) 'Watching Sandy's understanding grow'. *The Journal of Mathematical Behaviour, 11*(3), 243–257.

Pirie, S., & Kieren, T. (1992b). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*(5), 505–528.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: how we can characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 165–190.

Pitta-Pantazi, D., Gray, E., & Christou, C. (2002). Mental representations in elementary arithmetic. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 125–128. Norwich: PME.

POPS 2004. *Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet. 2004*. Opetushallitus. Vammala: Vammalan Kirjapaino Oy. http://www.oph.fi/ops/perusopetus/pops_web.pdf Luettu 16.12.2009.

Puolimatka, T. (2002a). Kvalitatiivisen tutkimuksen luotettavuus ja totuusteoriat. *Kasvatus, 33*(5), 465–473.

Puolimatka, T. (2002b). *Opetuksen teoria. Konstruktivismista realismiin*. Helsinki: Kustannusosakeyhtiö Tammi.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 17–24. Ankara, Turkey: PME.

Rauste-von Wright, M., von Wright, J., & Soini, T. (2003). *Oppiminen ja koulutus*. Helsinki: WSOY.

Reilly, R. R., & Lewis, E. L. (1983). *Educational Psychology. Applications for Classroom Learning and Instruction*. New York: Macmillan Publishing Co.

Saariluoma, P. (1990). *Taitavan ajattelun psykologia*. Helsinki: Otava.

Schoenfeld, A. H. (1994). Reflections on Doing and Teaching Mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale (NJ): Erlaub, 53–70.

Siegler, R S. (1987). Some General Conclusions about Children`s Strategy Choice Procedures. International *Journal of Psychology, 22*(5 & 6), 729–749.

Sillfverberg, H. (1999). *Peruskoulun yläasteen oppilaan geometrinen käsitetieto*. Tampereen yliopisto. Kasvatustieteellinen tiedekunta. Acta Universitatis Tamperensis 710. Doctoral dissertation.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a Mechanism for Conceptual Learning: Elaborating the Construct of Reflective Abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 305–329.

Spinillo, A. G. (2011). Number sense in children: Understanding number as an operator when adding and subtracting. In B. Ubuz (Ed.). *Proceedings 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 201–208. Ankara, Turkey: PME.

Stake, R. E. (2005). Qualitative Case Studies. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *The Sage Handbook of Qualitative Research*. Third Edition. Sage Publications. Thousand Oaks, California, 443–466.

Steffe, L.P., Glaserfeld, E. von, Richards, I., & Cobb, P. (1983). *Children's Counting Types*. New York: Praeger.

Steffe, L. P. (1991). The learning paradox: A plausible counterexample. In L. P. Steffe (Ed.), *Epistemological foundations of mathematical experience*. New-York: Springer-Verlag, 26–44

Tam, H., Jarrold, C., Baddeley, A. D., & Sabatos-De Vito, M. 2010. The development of memory maintenance: Children's use of phonological rehearsal and attentional refreshment in working memory tasks. *Journal of Experimental Child Psychology, 107*(3), 306–324.

Tharp, R. G., & Gallimore, R. (1988). *Rousing minds to life: Teaching, learning, and schooling in social context*. New York: Cambridge University Press.

Thorndike, E. L. (1922). *The psychology of arithmetic*. New York: MacMillan.

Tikkanen, P. (2008). *"Helpompaa ja hauskempaa kuin luulin" Matematiikka suomalaisten ja unkarilaisten perusopetuksen neljäsluokkalaisten kokemana*. Väitöskirja. Jyväskylä studies in education, psychology and social research 337.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2001). Investigating young children's strategy use and task performance in the domain of simple addition, using the "choice/no choice" method. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 273–278. Utrecht: PME.

Tynjälä, P. (1999). Oppiminen tiedon rakentamisena: konstruktivistisen oppimiskäsityksen perusteita. Helsinki: Kirjayhtymä.

Varol, F., & Farran, D. (2007). Elementary school students' mental computation proficiencies. *Early Childhood Education Journal, 35*(1), 89–94.

Vornanen , I. (1984). *Ensiluokkalaisen lukukäsitteen kehittäminen (Kehityspsykologinen näkökulma)*. Väitöskirja. Oulun yliopiston kasvatustieteiden tiedekunnan tutkimuksia. Kajaani: Kainuun Sanomain kirjapaino oy.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. (eds. M. Cole et al.) Cambridge, MA: Harvard University Press.

Vygotski, L. S. (1982). *Ajattelu ja kieli*. (suom. K. Helkama & A. Koski-Jännes, venäjänkielinen alkuperäisteos vuodelta 1931) Espoo: Weilin+Göös.

Wadsworth, B. J. (1984). *Piaget's Theory of Gognitive and Affective Development*. Third edition. New York: Longman.

Oppikirjalähteet:

Rikala, S., Sintonen, A-M., Uus-Leponiemi, T., Ilmavirta, R., & Uus-Leponiemi, M. (2003). *Laskutaito 1. Syysosa*. 14. painos. Helsinki: WSOY.

Rikala, S., Sintonen, A-M., Uus-Leponiemi, T., Ilmavirta, R., & Uus-Leponiemi, M. (2003). *Laskutaito 1. Kevätosa*. 14. painos. Helsinki: WSOY.

Rikala, S., Sintonen, A-M., Uus-Leponiemi, T., Ilmavirta, R., & Uus-Leponiemi, M. (2003). *Laskutaito 2. Syysosa*. 13. painos. Helsinki: WSOY.

Rikala, S., Sintonen, A-M., Uus-Leponiemi, T., Ilmavirta, R., & Uus-Leponiemi, M. (2003). *Laskutaito 2. Kevätosa*. 12. uud. painos. Helsinki: WSOY.

Liitteet

Liite 1. Oppilaiden haastattelu

Osio 1. Suullisesti lukujonojen luettelua lukualueella 1–20

- luettele luvut 1–20
- luettele luvut takaperin 20,19,18, …
- laske 2:n välein (lapulla näkyvissä alku 2,4,6,…), 20:een asti
- laske 2:n välein, aloita 1:stä (lapulla näkyvissä alku 1,3,5,…), 20:een asti
- laske 2:n välein taaksepäin (lapulla näkyvissä alku 20, 18, 16,…)

Osio 2. Edellinen ja seuraava luku

- mikä luku on 1 pienempi kuin 8, 10, 1 ?
- mikä luku on 1 suurempi kuin 9, 14, 19 ?
- mikä luku on 2 pienempi kuin 7, 11, 12 ?
- mikä luku on 2 suurempi kuin 5, 18, 9 ?
- mikä luku on 1 pienempi kuin 100 ?
- mikä luku on 1 suurempi kuin 79 ?
- mikä luku on 2 pienempi kuin 60 ?
- mikä luku on 2 suurempi kuin 98 ?
- mikä luku on 1 pienempi kuin 79 ?
- mikä luku on 1 suurempi kuin 67 ?
- mikä luku on 2 pienempi kuin 90 ?
- mikä luku on 2 suurempi kuin 37 ?

Osio 3. Yhteen ja vähennyslaskustrategiat.

Sitten annan sinulle tehtäviä. Jos tarvitset palikoita, niitäkin voi käyttää. (Tehtävät esillä pahvilapuilla, oppilaalla on kaksi 10 palan Unifix-palikkasauvaa käytössään.) Selitä, miten ratkaisit tehtävän?

1. ja 2.luokka : 2+2, 4+3, 6+4, 9+6, 8+8, 7+7, 4-4, 10-1, 12-5, 15-7, 20-15 ja 20-19

2. luokka edellisten lisäksi: 82-4, 47+6, 32+10, 55-9, 75-20 ja 15+15

Osio 4. Lukukäsitteen soveltamista.

Sanalliset tehtävät, joiden numeroarvot näytetään paperilla. Apuna saa käyttää palikoita. (tehtävä esillä paperilla suurikokoisella fontilla)

1. ja 2. luokka:

1. Ilmapallokauppiaalla oli 6 punaista ja 4 keltaista palloa. Kuinka monta palloja oli yhteensä?
2. Tarkkuusheitossa oli 12 keilaa. Niistä kaatui 5. Kuinka monta keilaa jäi pystyyn?

2. luokka:

3. Kummitusjunaan meni 3 tyttöä, 5 poikaa ja 2 aikuista. Kuinka monta ihmistä meni kummitusjunaan?
4. Mikko sai isältä 5 euroa ja äidiltä 10 euroa. Tunnin jälkeen hän oli käyttänyt vasta 3 euroa. Kuinka paljon Mikolla oli rahaa jäljellä?
5. Laura voitti onginnasta 20 marmorikuulaa. Hän antoi niistä Katille 9 ja pikkuveljelleen 8. Kuinka monta marmorikuulaa Lauralle jäi?

Liite 2. Vuoden kuluttua tehty joidenkin oppilaiden haastattelu

2.luokka:

Osio 3. kuten edellä liitteessä 1.

Lisäksi seuraavat tehtävät:

11+__=30
22+__=40
75+__=40

42-14
43+25
80-35
820-40
750-125

3.luokka:

1 pienempi kuin 1000
10 pienempi kuin 1000
1 pienempi kuin 500
10 pienempi kuin 500
-mitä pitää laskea 700:aan lisää, että tulee 1000?
725+25, 47+6, 82-4, 55-9, 32+10, 15+15, 11+_=30, 22+_=40, 75+_=100, 42-14, 43+25, 80-35, 820-40, 750-125

Liite 3. 1. luokan strategiat eri mittauksissa

oppilas	2+2	4+3	6+4	9+6	8+8	7+7	4-4	10-1	12-5	15-7	20-15	20-19	sanall. 1	sanall. 2
1	5	2	2	2	1	2	1	5	1	2	2	2	5	2
2	5	2	2	2	2	4	5	5	2	2	5	5	5	4
3	5	4	2	4	5	2	5	5	2	4	4	5		
4	5		1	1	1	1	5	1	1	1	1	1	2	1
5	2	2	2	1	1	1	5	5	1	1	1	1	2	1
6	5	2	2	2	2	4	1	5	2	2	4	5	2	2

1.luokan strategiat syyskuun mittauksessa; tyhjä = ei tietoa, 1 = puutteelinen strategia, 2 = lukusanojen luetteleminen, 3 = oma strategia, 4 = osittelustrategia, 5 = automaatio
oppilaat: 1.Harri, 2.Seppo, 3.Matti, 4.Jarkko, 5.Tuomo, 6.Paavo

oppilas	2+2	4+3	6+4	9+6	8+8	7+7	4-4	10-1	12-5	15-7	20-15	20-19	sanall. 1	sanall. 2
1	5	4		4	4	4	5	5		3			4	
2	5		5	4	5	5	5	5	4	4	4	5	5	4
3	5	4	4		2	4	5	5	4	4	4	4	5	3
4	5	2	5	4	2	2	5	5	2	1	2	5	5	2
5	5	2	2		4	2	5	5	2	1	1	5	2	2
6	5	2	2	3	2	3	5	2	2	2	2	2	2	2

tammikuun mittaus

oppilas	2+2	4+3	6+4	9+6	8+8	7+7	4-4	10-1	12-5	15-7	20-15	20-19	sanall. 1	sanall. 2
1	5	5	2	2	2	5	5	5	2	2	4	4	2	2
2	5	5	5	4	5	5	5	5	4	4	4	5	4	4
3	5	5	5	4	4	4	5	5	4	4	4	5	4	4
4	5	2	2	4	5	5	5	5	2	2	2	5		2
5	5	2	2	4	5	5	5	5	2	2	4	5		
6	5	2	2	4	5	5	5	5	2	2	2	5	2	

toukokuun mittaus

Liite 4. 2.luokan strategiat eri mittauksissa.

oppilas	2+2	4+3	6+4	9+6	8+8	7+7	4--4	10-1	12-5	15-7	20-15	20-19	47+6	82-4	55-9	32+10	15+15	75-20	sanall. 1	sanall. 2	sanall. 3	sanall. 4	sanall. 5
1	4	1	1	2	2	2	4	4	2			4	1		1	2			2			4	1
2	4	4	4	3	3	3	4	4		3	4	4	3	3	3	3	3	3	4	3	4	3	3
3	4	4	4	3	3	3	4	4	2	3	4	4	3	3	3	3	3	3	4	2	3	3	3
4	4	4	4	3	3	3	4	4	3	3	3	4	3	3	3	4	3	3	4	3	3	3	3
5	1	3	1	2	2	2	4	4	1	3	3	1		3		3	3	2	4		3	3	3
6	3	3	3	2			4	4		2	3	3				2	2		4	4	3	3	3
7	4	2	4	3	3	3	4	4	2	2	3	3	3	4		3	3	2	4	4	3	3	2
8		3	3	3		3	4	4	3			3		3	2	3	2	2			3		3
9	4	2	2	3	3	3	4	4	3	2	3	3	3	3	2		2		4		3	3	2
10	4	1	3	3			4	4	1	1	1	4				1	1	1			3	3	
11	4	4	1	1	4	1	4	4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3		1

Syyskuun mittaus. 1 = laskeminen lukusanoilla, 2 = oma strategia, 3 = osittelustrategia, 4 = automaatio, tyhjä = ei tietoa

oppilaat: 1.Leena, 2.Juha, 3.Liisa, 4.Pekka, 5.Hanna, 6.Maisa, 7.Niina, 8.Kaisa, 9.Milla, 10.Merja, 11.Riina

oppilas	2+2	4+3	6+4	9+6	8+8	7+7	4--4	10-1	12-5	15-7	20-15	20-19	47+6	82-4	55-9	32+10	15+15	75-20	sanall. 1	sanall. 2	sanall. 3	sanall. 4	sanall. 5
1	4	2	2	2	2	2	4	4	2	3	3	4	2	2		2	2	2			3	3	3
2	4	1	4	3	4	4	4	4	3	3	4	4	3	3	3	4	4	3	4	4	3	3	3
3	4	4	4	3	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	2	3	3		4		3	3	3
4	4	4	4	3	4	3	4	4	4	3	4	4		3	3	4	4	4	4	4	4	3	3
5	4	4	4	2	4	4	4	4	3	3	3	2	3	3	3	3	2	3	4	4	3	3	3
6	4	2		2			4	4	1	1	3	4	3		1	3	3	3	4		3	3	
7	4	4	4	3	3	4	4	4	2	2	4	4	2	3	2	3	3	3	4	4	3	3	3
8	4		3	3	3	3	4	4	3		4	4	3	3	3	3	3	3	4		3	3	3
9	4	2	3	3	2	4	4	4			2		3			3	3	3			3	3	
10	4	2	4	3	4	4	4	4	1	1	2	4		3		2	2	3	4	1	3	3	3
11	4	2	1	1	4	4	4	4	1	1			1	1	2	1		2	1	1	1	1	

tammikuun mittaus

oppilas	2+2	4+3	6+4	9+6	8+8	7+7	4--4	10-1	12-5	15-7	20-15	20-19	47+6	82-4	55-9	32+10	15+15	75-20	sanall. 1	sanall. 2	sanall. 3	sanall. 4	sanall. 5
1	4	1	3	2	4	3	4	4	4	3	1	4	3	3	1	3	3	3			3	3	1
2	4	1	4	3	4	4	4	4	3	1	4	4	3	3	3	4	4	3	4	1	3	3	3
3	4	4	4	3	4	4	4	4	3	3	3	4	3	3	3	4	3	3	4	3	3	3	3
4	4	4	4	3	3	3	4	4	3	3	3	4	3	3	3	4	3	3	4	4	3	3	3
5	4	1	4	2	3	3	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	3	3	3	3
6	4	3	3	3	4	4	4	4			3	4	3	3	3	4	3	3	4	3	3	3	3
7	4	4	4	3	4	4	4	4	2	4	3	3	3	3	3	3	4	3	4	2	3	3	3
8	4	3	3	4	4	3	4	4	3	3	3	4	3	3	3	4	3	3	4	4	3	3	3
9	4	2	3	3	4	4	4	4	2	1	2	2	1	2	2	3	3	3	4		3	3	2
10	4	4	4	3	4	4	4	4	1		1	4	1	1	1	1	1	2	4	1	3		3
11	4	4	1	1	4	4	4	4	1	1	1	4	1	1	1	3	1	3	1	1	3	3	1

toukokuun mittaus